

ESCOLA POLITECNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

**Aplicação de controle ótimo para a movimentação plana de carga em
pontes rolantes**

RUBENS MENEZHINI TERRA

São Paulo

2014

ESCOLA POLITECNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

**Aplicação de controle ótimo para a movimentação plana de carga em
pontes rolantes**

Trabalho apresentado à Escola Politécnica
da Universidade de São Paulo para a
obtenção do título de Graduação em
Engenharia.

RUBENS MENECHINI TERRA

Área de Concentração: Engenharia de
Controle.

Orientador: Agenor de Toledo Fleury

São Paulo

2014

Terra, Rubens Meneghini

Aplicação de controle ótimo para a movimentação plana de carga em pontes rolantes / R.M. Terra. – São Paulo, 2014. 84 p.

Trabalho de Formatura - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.

1.Controle ótimo (Aplicação) 2.Programação linear 3.Carga (Movimentação) 4.Pontes rolantes I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecânica II.t.

DEDICATÓRIA

Aos meus irmãos, os quais estarão sempre unidos ao longo da vida. À Gabriella Polisel por todo o apoio, força e incentivo que me deu por anos e ao longo da elaboração deste texto.

AGRADECIMENTOS

Agradeço principalmente ao professor Agenor de Toledo Fleury, por todo o apoio e compreensão e amizade.

Aos amigos Thiago Loureiro e Rafael Salles que sempre estiveram disponíveis para me auxiliar nas dificuldades encontradas ao longo do estudo.

RESUMO

TERRA, R.M. Aplicação de controle ótimo para a movimentação plana de carga em pontes rolantes. 2014. 87p. Dissertação (Conclusão de curso). - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, Departamento de Engenharia Mecânica, São Paulo, 2013.

O trabalho propõe-se a estudar o problema de movimentação plana de carga em uma ponte rolante. No modelo físico considera-se que a viga de sustentação é rígida e que o cabo de movimentação é flexível. O projeto do controlador é desenvolvido, com o objetivo de fazer o transporte em tempo mínimo, com oscilação limitada e aplicando-se o menor esforço de controle durante o trajeto.

ABSTRACT

TERRA, R.M. **Application of optimum control for plane drive on gantry cranes.** 2014. 87p. Dissertação (Conclusão de curso). - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, Departamento de Engenharia Mecânica, São Paulo, 2013.

This work proposes to study the plane drive on gantry cranes. The physical model considers a rigid beam and a flexible cable as components of the crane. The controller project development, with minimum-time, minimum-control energy and limited oscillation.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	12
1.1. PONTES ROLANTES	12
1.1.1. COMPONENTES DA PONTE ROLANTE	13
1.2. REFERÊNCIAS E ESTUDOS	14
1.2.1. ZAIRULAZHA BIN ZAINAL, MARÇO 2005	14
1.2.2. EDSON JOSÉ CARDOSO DE SOUZA, 2009	14
1.2.3. GRUPO DE MECÂNICA APLICADA, UFRGS	15
1.2.4. QUANSER 3DOF CRANE	15
1.2.5. GRUPO DE ALUNOS DA ESCOLA POLITÉCNICA, 2010	16
1.2.6. LUIZ VASCO PUGLIA, 2011	17
1.3. MOTIVAÇÃO	19
1.4. OBJETIVOS	19
2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS	20
2.1. MECÂNICA DE CORPO RÍGIDO	20
2.1.1. FUNDAMENTOS DA CINEMÁTICA	20
2.1.2. TEOREMA DO MOVIMENTO DO BARICENTRO	20
2.1.3. ENERGIA CINÉTICA DE UM CORPO RÍGIDO	21
2.2. MECÂNICA ANALÍTICA	21
2.2.1. COORDENADAS GENERALIZADAS	21
2.2.2. EQUAÇÕES DE LAGRANGE	22
2.2.3. FUNÇÃO DE DISSIPACÃO DE RAYLEIGH	23
2.3. CONTROLE ÓTIMO	23
2.3.1. DESCRIÇÃO MATEMÁTICA	23
2.3.2. RESTRIÇÕES FÍSICAS	27
2.3.3. CRITÉRIOS DE DESEMPENHO	27
2.3.4. O PROBLEMA DE CONTROLE ÓTIMO	27
2.4. PROGRAMAÇÃO LINEAR	28
2.4.1. O PROBLEMA DE PL	28

2.4.2.	REPRESENTAÇÃO DO PROBLEMA DE PL	30
2.4.3.	SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE PL	31
2.5.	PROGRAMAÇÃO LINEAR APLICADA A CONTROLE ÓTIMO	36
3.	METODOLOGIA	39
4.	ESTUDO DE CASO	40
4.1.	MODELO FÍSICO	40
4.2.	MODELO MATEMÁTICO	41
4.2.1.	HIPÓTESES DO MODELO	41
4.2.2.	LAGRANGEANA DO SISTEMA	41
4.2.3.	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS	43
4.3.	SOLUÇÃO DO SISTEMA COMPLETO SEM CONTROLE	47
4.3.1.	ESPAÇO DE ESTADOS	47
4.3.2.	SIMULAÇÃO DO SISTEMA COMPLETO SEM CONTROLE	49
4.4.	MODELO MATEMÁTICO SIMPLIFICADO SEM CONTROLE	51
4.4.1.	DEDUÇÃO DO MODELO SIMPLIFICADO	51
4.4.2.	O MODELO SIMPLIFICADO EM ESPAÇO DE ESTADOS	53
4.4.3.	SIMULAÇÃO DO SISTEMA SIMPLIFICADO SEM CONTROLE	54
4.5.	COMPARATIVO ENTRE MODELOS	55
5.	CONTROLE	58
5.1.	DEFINIÇÃO DO PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR	58
5.1.1.	DETERMINAÇÃO DA FUNÇÃO OBJETIVO	58
5.1.2.	DETERMINAÇÃO DAS RESTRIÇÕES	59
5.1.3.	CONDIÇÕES INICIAIS E FINAIS	59
5.1.4.	DESCRIÇÃO COMPLETA NO FORMATO DE PL	59
5.2.	SIMULAÇÃO DO PROBLEMA COM CONTROLE	60
5.2.1.	RESOLUÇÃO DA PL PARA O MODELO COMPLETO	60
5.2.2.	RESOLUÇÃO DA PL PARA O MODELO SIMPLIFICADO	61
6.	RESULTADOS	66

6.1. MODELOS MATEMÁTICOS OBTIDOS	66
6.1.1. MODELO NÃO-LINEAR	66
6.1.2. MODELO LINEAR COMPLETO	66
6.1.3. MODELO LINEAR SIMPLIFICADO	66
6.2. HISTÓRIA DE CONTROLE OBTIDA	67
6.3. HISTÓRIA DE CONTROLE APLICADA AOS MODELOS MATEMÁTICOS	67
6.3.1. MODELO LINEAR COMPLETO	67
6.3.2. MODELO LINEAR SIMPLIFICADO	68
<u>7. CONCLUSÕES</u>	<u>70</u>
<u>8. SUGESTÕES DE CONTINUIDADE</u>	<u>72</u>
<u>9. REFERÊNCIAS</u>	<u>73</u>
<u>10. APÊNDICE A – PROGRAMAS</u>	<u>74</u>

1. INTRODUÇÃO

1.1. Pontes Rolantes

A ponte rolante é um equipamento utilizado para a elevação e movimentação de cargas e materiais pesados. Pode descarregar e carregar containers, além de organizar materiais pesados em grandes depósitos. Seu uso é comum nas indústrias: metal mecânica e de mineração, principalmente.

Na movimentação de carga por uma ponte rolante, três movimentos são possíveis: o movimento vertical de içamento e descida da carga, operado pela extensão ou recolhimento dos cabos, o movimento longitudinal ao longo do eixo da viga, causado pela movimentação do carro, e o movimento transversal em relação ao eixo da viga, que é feito sobre os trilhos de apoio da ponte rolante. Normalmente a movimentação possui três etapas: içamento da carga, movimentação até o ponto desejado, dado por uma composição de movimentos transversais e longitudinais, e por último a descida da carga no ponto final.



Figura 1 – Ponte Rolante

Para que a movimentação seja eficiente, o processo deve ser rápido, para proporcionar ganho de tempo, economia nos custos totais, produtividade e competitividade. Além disso, deve-se garantir que as oscilações da carga serão

mínimas para manter a integridade da carga, componentes da ponte rolante, operadores, etc.

Porém, quanto maior a aceleração imposta ao carro, maior a oscilação da carga, de forma que os objetivos de reduzir o tempo de operação e a oscilação da carga se tornam altamente conflitantes.

1.1.1. Componentes da ponte rolante

Todas as pontes rolantes possuem as mesmas peças fundamentais:

- Viga de apoio, que fica apoiada sobre os trilhos, e que serve de apoio ao carro;
- Carro, que realiza a movimentação da carga na direção longitudinal ao longo da viga;
- Talha elétrica, que realiza o movimento vertical da carga, é composta de cabos de aço e motor;
- Freios;
- Cabine de comando.



Figura 2 – Ponte Rolante realizando transporte

1.2. Referências e estudos

1.2.1. Zairulazha Bin Zainal, março 2005

Em 2005 ZAIRULAZHA BIN ZAINAL realizou um estudo sobre a vibração de pontes rolantes e como minimizá-las. O trabalho possui ideias que podem ser aqui aproveitadas. Na abordagem de ZAIRULAZHA BIN ZAINAL, existe a limitação de termos o comprimento l fixo, ou seja, o cabo é considerado rígido. Além disso, movimentos de subida e descida da carga não foram testados neste caso. De qualquer forma o controle do movimento plano da carga para a translação do carro ao longo da lança foi estudado.

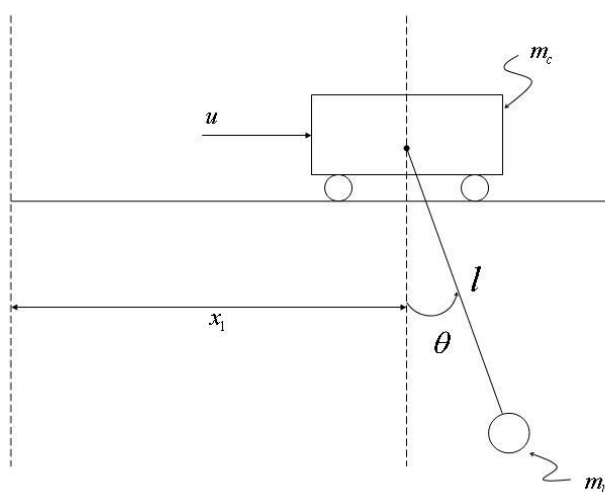


Figura 3 – Modelo de ponte rolante proposta por ZAIRULAZHA BIN ZAINAL

1.2.2. Edson José Cardoso de Souza, 2009

Em 2009, Edson José Cardoso de Souza apresentou em sua tese de mestrado pela Escola Politécnica, um trabalho de título: “Controle anti-oscilatório de tempo mínimo para guindaste usando a programação linear”, o qual, trata da vibração em guindastes, e propõe métodos para minimizá-la. Como a viga foi considerada rígida, a modelagem pode ser aproveitada para uma ponte rolante, pois o modelo físico pode ser representado de forma idêntica.

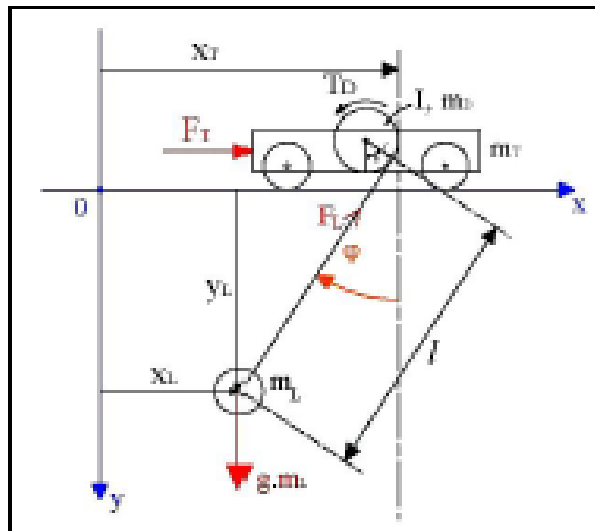


Figura 4 - Modelo de guindaste, proposto por Edson José Cardoso de Souza

1.2.3. Grupo de Mecânica Aplicada, UFRGS

Um grupo com diversos participantes, dentre eles professores e mestrandos da UFRGS, realizaram um trabalho a respeito de guindastes, que levava em conta, inclusive, a resposta do guindaste quando solicitado pelo vento. O trabalho possui diversas informações úteis no estudo a ser aqui realizado.

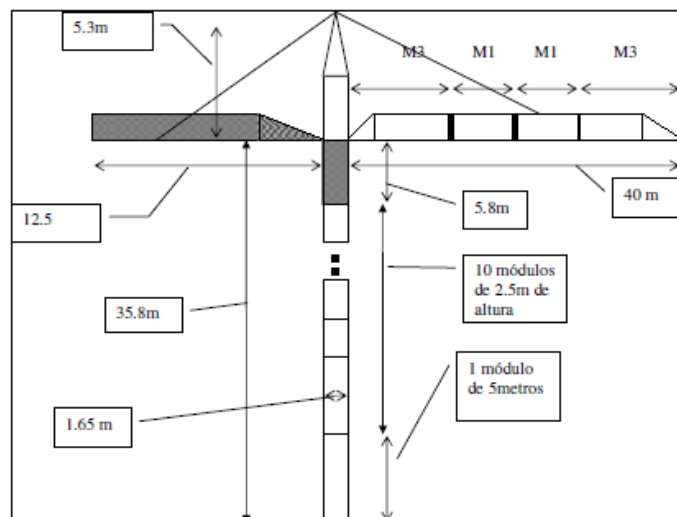


Figura 5 - Esquema de guindaste, por grupo de mecânica aplicada, ufrgs

1.2.4. Quanser 3DOF Crane

A empresa Quanser possui um guindaste de torre em escala reduzida, que permite a realização de testes físicos, sem o risco e custos de um modelo em escala

real. Na ficha técnica do modelo, existem várias informações dimensionais, que podem ser usadas nas simulações numéricas, para garantir que os dados possuem proporcionalidade e são aderentes aos de guindastes reais.



Figura 6 - Modelo de guindaste Quanser 3DOF Crane

1.2.5. Grupo de alunos da Escola Politécnica, 2010

Em 2010 um grupo formado por Bruno Medeiros Leite, José Moreira de Souza Neto, Luciano de Almeida Nagata e Yuji Fugita Sasaki, realizou em seu trabalho da disciplina de Modelagem de Sistemas Dinâmicos (e posteriormente, em 2011, na disciplina de controle) a modelagem e uma série de simulações para um guindaste do tipo torre.

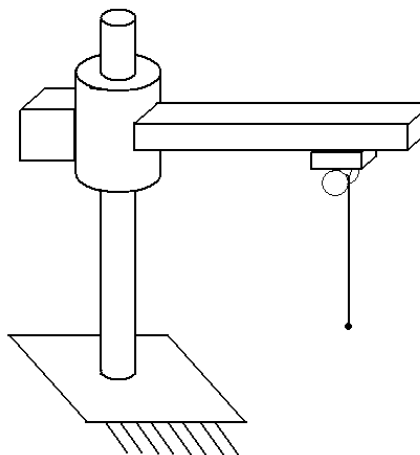


Figura 7 - Modelo de guindaste para movimento tridimensional

Neste trabalho, foi considerada a elasticidade do cabo, porém não da estrutura, o que se adere à proposta de desenvolvimento deste, além de fornecer ricas informações, é uma importante base comparativa de dados. A bibliografia utilizada pelo grupo será consultada ao longo do projeto.

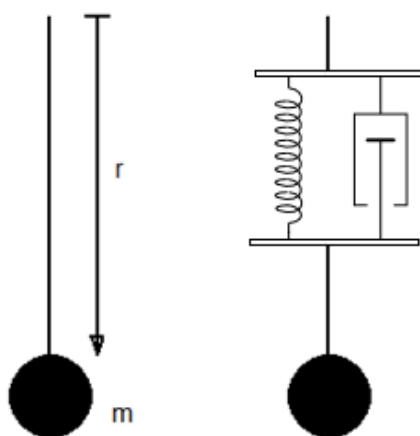


Figura 8 - Modelo de cabo de aço com elasticidade

1.2.6. Luiz Vasco Puglia, 2011

Luiz Vasco Puglia, orientado por Fabrizio Leonardi, realizou um estudo no qual modelou uma ponte rolante, considerando sua estrutura rígida.

O modelo é composto por um carro com rodas, que desliza sobre trilhos e apresenta deslocamento apenas na direção da viga. Preso ao carro existe um sistema de içamento de carga, permitindo variar a distância da massa ao carro. Desta forma, a planta possui três graus de liberdade, a posição do carro, o ângulo formado entre a vertical e o cabo de suspensão da massa e a distância entre a massa e o carro.

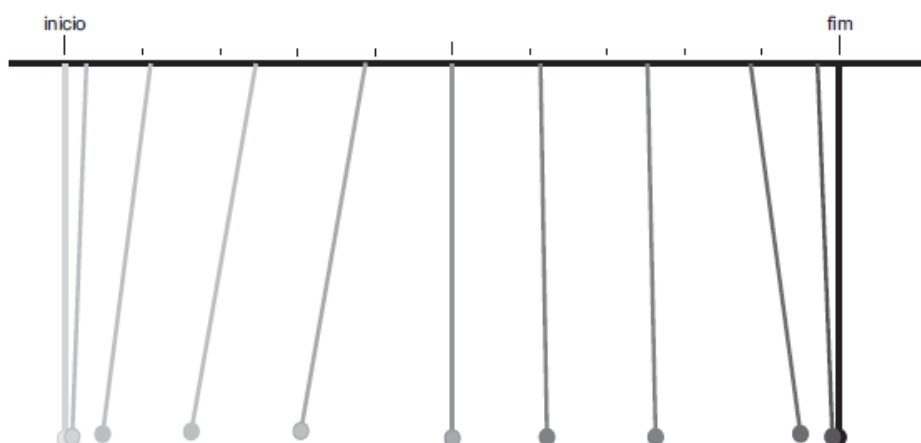


Figura 9 - Trajetória da carga (Vasco,2011)

O objetivo do trabalho de Vasco foi determinar a trajetória ótima a ser realizada pela carga, de forma que o seu deslocamento fosse feito em tempo mínimo e com a menor oscilação possível.

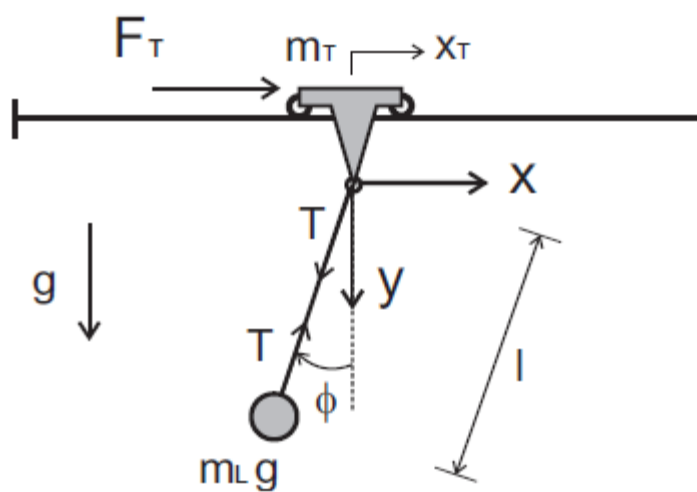


Figura 10 – Modelo físico proposto por Vasco

1.3. Motivação

Muitos esforços foram feitos no desenvolvimento de controladores para a operação de pontes rolantes, guindastes e transportadores de carga no geral. Dentre os principais objetivos dos controladores, destaca-se a tentativa de reduzir as vibrações tanto da estrutura, quanto as oscilações realizadas pela carga na sua movimentação.

Apesar dos avanços conquistados, os controladores desenvolvidos até então não garantem que tal objetivo seja atingido de forma satisfatória, ou que a operação seja fisicamente realizável. Assim, considera-se o trabalho de desenvolvimento de controladores para movimentação de carga, necessário e sem solução bem definida.

Fatos motivacionais para o desenvolvimento do presente trabalho são:

- As vibrações da estrutura fazem com que o posicionamento da carga seja dificultado e as tarefas de movimentação se tornem mais lentas, o que implica diretamente no custo de execução das obras ou outras aplicações;
- A movimentação de grandes cargas em pontes rolantes coloca em risco os operadores e as pessoas que frequentam ambientes nos quais as operações são feitas.

1.4. Objetivos

O objetivo do trabalho é modelar e realizar o controle de uma ponte rolante considerando a elasticidade do cabo, minimizando o esforço de controle, assim como o tempo de execução da movimentação, e limitando a oscilação da carga. A proposta é desenvolver um controlador que seja capaz de movimentar a carga de forma que essa chegue na posição final com o cabo de sustentação na vertical no mínimo tempo possível e com o menor esforço de controle.

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

2.1. Mecânica de corpo rígido

2.1.1. Fundamentos da cinemática

Ao analisar o movimento de um corpo rígido, observa-se que através do vínculo cinemático existente entre os pontos deste, basta o conhecimento da velocidade de um ponto arbitrário pertencente ao corpo e do vetor de rotação deste corpo, para que todo o campo de velocidade seja univocamente determinado.

Sendo $(P_i - P_j)$ o vetor de posição relativa entre dois pontos de um mesmo corpo rígido, é possível provar que a velocidade relativa entre os pontos é perpendicular à reta que os une, ou seja, ao vetor $(P_i - P_j)$. É possível demonstrar também que existe uma relação unívoca entre os vetores velocidade de dois pontos do corpo rígido:

$$v_i = v_j + \Omega \wedge (P_i - P_j) \quad (2.1)$$

Sendo que Ω é o vetor de rotação do corpo. Derivando a equação anterior em relação ao tempo tem-se o campo de acelerações:

$$a_i = a_j + \dot{\Omega} \wedge (P_i - P_j) + \Omega \wedge [\Omega \wedge (P_i - P_j)] \quad (2.2)$$

2.1.2. Teorema do movimento do baricentro

Aplicando a segunda lei de Newton a um elemento infinitesimal de massa dm , supondo a massa do corpo invariante no tempo, tem-se:

$$df = a \cdot dm \quad (2.3)$$

E integrando a equação acima em todo o domínio do corpo obtém-se:

$$R = \int_{\text{corpo}} a \cdot dm \quad (2.4)$$

Sendo R a resultante das forças atuando sobre o corpo. A expressão acima pode facilmente ser levada a:

$$R = m \cdot a_G \quad (2.5)$$

Com a_G sendo a aceleração do baricentro do corpo.

2.1.3. Energia cinética de um corpo rígido

Partindo de um corpo rígido e dois sistemas de coordenadas, sendo um deles solidário ao corpo, e o outro do qual é medido o movimento do corpo, tem-se que a energia cinética de um elemento diferencial de massa é por definição:

$$dT = \frac{1}{2} \cdot v^2 dm \quad (2.6)$$

Integrando em todo o domínio do corpo, obtém-se a energia cinética total para o corpo:

$$T = \frac{1}{2} \int_{\text{corpo}} v^2 \cdot dm \quad (2.7)$$

Sendo: $r' = (P - O')$ o vetor de posição relativa entre o elemento de massa dm e o ponto O' , pertencente ao corpo, fica que:

$$v = v_{O'} + \Omega \wedge r' \quad (2.8)$$

O que levado à expressão da energia cinética fornece:

$$T = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{O'}^2 + m \cdot v_{O'} \cdot \Omega \wedge (G - O') + \frac{1}{2} \cdot \{\Omega\}^t [J_{O'}] \{\Omega\} \quad (2.9)$$

Se for escolhido O' de forma que $O' \equiv G$ então pode-se simplificar para:

$$T = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_G^2 + \frac{1}{2} \cdot \{\Omega\}^t [J_G] \{\Omega\} \quad (2.10)$$

Sendo J_G a matriz de inércia do corpo em relação ao seu baricentro.

2.2. Mecânica analítica

A abordagem da mecânica analítica considera o sistema mecânico como um todo, formulando o problema a partir de duas grandezas escalares: a energia cinética e a energia potencial. As restrições cinemáticas do movimento são contempladas sem a necessidade do cálculo das forças existentes no sistema. Além disso, a introdução de coordenadas generalizadas torna o problema extremamente versátil.

2.2.1. Coordenadas generalizadas

Existe um número infinito de conjuntos de coordenadas que podem ser utilizadas para representar a configuração de um sistema. Alguns conjuntos podem até

mesmo não ter um significado geométrico aparente, mas representam a posição do sistema em determinado instante e podem, portanto, ser consideradas como coordenadas num sentido mais amplo. Desta forma, podemos chamar qualquer conjunto com essas propriedades de coordenadas generalizadas de um sistema.

Associado a cada conjunto de coordenadas generalizadas, pode existir um conjunto de equações de vínculo cinemático. Porém, se as coordenadas forem independentes, então o número de equações que descrevem o sistema é igual ao número de graus de liberdade, e neste caso não há equações de vínculo.

2.2.2. Equações de Lagrange

As equações de Lagrange podem ser obtidas à partir das Leis de Newton, usando o conceito de trabalho virtual e expressando os resultados por meio de coordenadas generalizadas e forças generalizadas. Na descrição de um sistema com n graus de liberdade resultam n equações diferenciais de segunda ordem. Apenas velocidades e deslocamentos aparecem na função Lagrangeana (ou seja, funções das coordenadas generalizadas e suas primeiras derivadas). Nenhuma aceleração é necessária e, portanto, a necessidade de cálculos cinemáticos complexos é frequentemente evitada. Uma vez que a função Lagrangeana é determinada, o procedimento para obter as equações do movimento é muito direto. É um fato a ser lembrado, que o enfoque Lagrangeano permite que se obtenham as equações do movimento para uma larga classe de problemas, a partir de uma única função escalar. A abordagem por energias em lugar de forças e acelerações permite que se lide com grandezas escalares.

De acordo com Lagrange, sendo T a energia cinética total do sistema e V a energia potencial total, então a Lagrangeana pode ser obtida de:

$$L = T - V \quad (2.11)$$

A partir daí as equações diferenciais do sistema são obtidas da expressão a seguir:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = Q_i; \quad (i = 1, 2, 3 \dots n) \quad (2.12)$$

Sendo x_i as coordenadas generalizadas e Q_i as forças generalizadas presentes para cada coordenada generalizada.

2.2.3. Função de dissipação de Rayleigh

As forças generalizadas que aparecem na equação anterior incluem as forças não conservativas, que não podem ser derivadas a partir de um potencial. Dentre essas forças existe uma classe que deve receber uma atenção especial que engloba as forças que são proporcionais à velocidade da partícula e resistem ao movimento, isto é, agem na mesma direção da velocidade, mas em sentido oposto, e têm a forma:

$$F_i = -c_i \cdot \dot{x}_i \quad (2.13)$$

Funções deste tipo são dissipativas, pois sua potência é negativa e, energia é retirada do sistema. Definindo a função de dissipação de Rayleigh como:

$$R = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \cdot c_i \cdot \dot{x}_i^2 \quad (2.14)$$

A força generalizada associada a R pode ser expressa por:

$$Q_i = -\frac{\partial R}{\partial \dot{x}_i} \quad (2.15)$$

Introduzindo a função de dissipação na expressão de Lagrange para a determinação das equações diferenciais do sistema fica:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_i} = Q_i; \quad (i = 1, 2, 3 \dots n) \quad (2.16)$$

2.3. Controle ótimo

A metodologia do controle ótimo é utilizada para se minimizar ou maximizar uma função objetivo de um sistema ou processo, respeitando uma série de restrições. Como resultado será obtida uma lei de controle que atenda aos objetivos.

A formulação de um problema de controle ótimo exige: a descrição matemática do modelo ou processo, determinação das restrições físicas ou de recursos do sistema ou processo e especificação do critério de desempenho.

2.3.1. Descrição matemática

A descrição matemática pode ocorrer de duas formas: no domínio das frequências, na forma de funções de transferência; no domínio do tempo, na forma de variáveis de estado. No caso será aprofundada a representação no domínio do tempo.

Como dito em [14], o estado de um sistema dinâmico é um conjunto de valores físicos (posição, velocidade, aceleração, temperatura, etc.), normalmente representados de forma vetorial, que determinam completamente a evolução do sistema ao longo do tempo na ausência de excitação externa.

Dado que o comportamento de um sistema dinâmico é descrito por um conjunto de equações diferenciais, o modelo matemático do sistema é constituído por esse conjunto de equações, além de um conjunto de condições iniciais e de contorno.

Na abordagem por espaço de estados, todas as equações são reduzidas à forma de equações diferenciais de primeira ordem. As variáveis dinâmicas que aparecem nessas equações são chamadas de variáveis de estado. Cada variável de estado deve ter sua condição inicial determinada.

Como exemplo, a descrição em espaço de estados para o sistema abaixo será determinada.

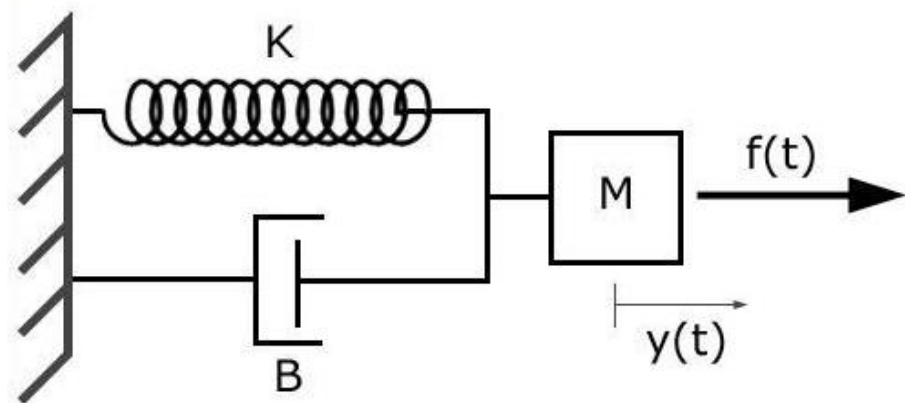


Figura 11 – Sistema massa-mola-amortecedor

Aplicando os métodos descritos nas seções anteriores, é possível deduzir que a equação diferencial que representa o sistema físico é:

$$M \cdot \ddot{x} + B \cdot \dot{x} + K \cdot x = f(t) \quad (2.17)$$

Define-se:

$$x = q_1 \quad (2.18)$$

$$\dot{x} = q_2 \quad (2.19)$$

De forma que: $\dot{q}_1 = q_2$

O sistema fica:

$$\dot{q}_1 = q_2 \quad (2.20)$$

$$\dot{q}_2 = -\frac{B}{M} \cdot q_2 - \frac{K}{M} \cdot q_1 + \frac{f(t)}{M} \quad (2.21)$$

Que descrito na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{B}{M} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{f(t)}{M} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Se a força $f(t)$ for entendida como uma entrada de controle que serve para posicionar a massa do sistema, representada por $u(t)$:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{B}{M} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \end{bmatrix} \cdot u \quad (2.23)$$

Na forma geral de uma representação em espaço de estados:

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \quad (2.24)$$

Sendo que:

$\dot{x}(t)$ = Vetor das derivadas primeiras dos estados

A = Matriz dinâmica do sistema

$x(t)$ = Vetor de estados

B = Matriz de controle

$u(t)$ = Vetor de controle

As matrizes A e B são matrizes de constantes, neste caso os sistemas são ditos invariantes no tempo. Além disso é necessário definir condições iniciais de q_1 e q_2 para que a dinâmica do sistema esteja completamente descrita.

Falta ainda uma descrição para a informação sobre os estados do sistema ao longo do tempo. As medidas são agrupadas em um vetor de saída $y(t)$ que contém todas as observações realizadas em função do tempo t . Deve-se construir um modelo de observações relacionando saídas e variáveis de estado. No caso linear fica:

$$y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \quad (2.25)$$

Sendo que:

$y(t)$ = Vetor das saídas

C = Matriz de observação de estados

$x(t)$ = Vetor de estados

D = Matriz de entradas diretas

$u(t)$ = Vetor de controle

Com isso a representação completa no espaço de estados:

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \quad (2.26)$$

$$y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \quad (2.27)$$

Que para o sistema massa-mola-amortecedor fica:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{B}{M} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \end{bmatrix} \cdot u \quad (2.28)$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + [0 \quad 0 \quad 0]u \quad (2.29)$$

Além das condições iniciais.

Deve-se ainda considerar duas definições. Para o sistema descrito pela equação $\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t)$ com $t_0 \leq t \leq t_f = t \in [t_0, t_f]$

a) O histórico dos valores de entrada (u) durante o intervalo $[t_0, t_f]$ recebe o nome de história de controle, ou simplesmente controle;

b) O histórico dos valores de estado (x) durante o intervalo $[t_0, t_f]$ recebe o nome de trajetória de estado. Vale ressaltar que a trajetória de controle deve ser admissível, ou seja, deve respeitar as restrições físicas descritas no próximo tópico.

2.3.2. Restrições físicas

Como restrições físicas pode-se entender limitações do sistema ou do processo, por exemplo: máxima aceleração, máxima velocidade, máxima potência do motor, comprimento máximo ou mínimo, máximo orçamento, máximo ou mínimo número de máquinas ou trabalhador, etc. No exemplo do sistema massa-mola-amortecedor, pode-se impor como restrição física a máxima força aplicada à massa como sendo de 20N:

$$u(t) \leq 20 \quad (2.30)$$

2.3.3. Critérios de desempenho

Controle ótimo é aquele no qual se minimiza (ou maximiza) uma medida de desempenho. A formulação do problema pode indicar diretamente a escolha de uma medida de desempenho, porém em outros problemas a escolha é uma questão subjetiva. Por exemplo, para um problema no qual deseja-se mover uma carga entre dois pontos, no mínimo tempo possível, a medida de desempenho aparece naturalmente. Por outro lado, se a condição imposta for posição e velocidade do sistema próximos a zero, com o menor esforço de controle, a medida de desempenho não é imediata.

2.3.4. O problema de controle ótimo

O problema de controle ótimo consiste em determinar uma lei de controle u^* admissível que faça com que o sistema $\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t)$ acompanhe uma trajetória admissível x^* e que minimize ou maximize o índice de desempenho J determinado:

$$J = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt \quad (2.31)$$

Sendo que u^* é chamado de controle ótimo e x^* é a trajetória ótima. Conforme será visto à frente, nem sempre o controle ótimo existe. Pode ser impossível encontrar um controle ótimo admissível que garanta uma trajetória admissível. Em outros casos ainda, o controle ótimo pode não ser único, de forma que há mais de uma lei de controle que resolve o problema de forma ótima. Quando pode-se afirmar que u^* faz com que a medida de desempenho seja minimizada, diz-se que:

$$J^* \triangleq h(x^*(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x^*(t), u^*(t), t) dt \leq h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt \quad (2.32)$$

Para $\forall u \in U$; $\forall x \in X$. A desigualdade indica que este é o menor valor para o indicador de desempenho dentro da região admissível.

Se o objetivo for a maximização de alguma medida de desempenho do sistema, estas mesmas teorias se aplicam, minimizando os negativos desta medida. Nas seções seguintes serão vistos métodos para a resolução do problema de controle ótimo.

2.4. Programação linear

A programação linear (PL) é uma ferramenta para resolver problemas de otimização. Em 1947 George Dantzig desenvolveu um método eficiente para resolver problemas formulados em programação linear, o chamado algoritmo simplex. Desde então problemas de diversas áreas como bancos, educação, petróleo, entre outros, vem sendo desenvolvidos e resolvidos na forma de PL.

2.4.1. O problema de PL

Para ilustrar um problema de PL e ao mesmo tempo defini-lo, usar-se-á o exemplo demonstrado em [10].

A empresa Giapetto's Woodcarving, Inc. fabrica dois tipos de brinquedos de madeira: soldados e trens. Sendo que tem-se os seguintes dados a respeito de seu preço de venda e custos relacionados à fabricação:

	Soldados	Trens
Preço de Venda (R\$)	27	21
Custo de materiais (R\$)	10	9
Custo de mão de obra (R\$)	14	10
Carpintaria (Horas)	1	1
Acabamento (Horas)	2	1

Tabela 1 – Variáveis do problema de Giapetto

Além disso, Giapetto consegue comprar toda a matéria prima, mas tem apenas 100 horas para empregar em acabamentos, e 80 horas para carpintaria. A demanda por trens é ilimitada, mas ele consegue vender no máximo 40 soldados por semana. O

Giapetto quer maximizar seu lucro semanal, e para isso precisa decidir quantos soldados e quantos trens fabricar por semana.

Para formular este problema de PL, definem-se alguns conceitos:

- **Variáveis de decisão:** As variáveis de decisão devem descrever completamente as decisões a serem tomadas, no caso do Giapetto, ele precisa definir o número de soldados e o número de trens, e assim suas variáveis de decisão são:

x_1 = Número de soldados a produzir por semana

x_2 = Número de trens a produzir por semana

- **Função objetivo:** Sempre, num problema de PL, deseja-se maximizar ou minimizar algo. Este algo deve ser função linear das variáveis de decisão. Esta função linear, a ser maximizada ou minimizada, é chamada de função objetivo. No caso de Giapetto:

$$\text{Lucro semanal} = \text{Receita semanal} - \text{Custo semanal} \quad (2.33)$$

Com as receitas sendo:

$$\text{Receita semanal} = 27 \cdot x_1 + 27 \cdot x_2 \quad (2.34)$$

E os custos:

$$\text{Custo semanal} = (10 + 14) \cdot x_1 + (9 + 10) \cdot x_2 \quad (2.35)$$

De forma que o lucro semanal, que é a função objetivo a ser maximizada é a seguinte:

$$\text{Lucro semanal} = 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \quad (2.36)$$

Chamando a função objetivo de z tem-se que:

$$\max(z) = 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \quad (2.37)$$

- **Restrições:** Conforme Giapetto aumenta sua produção, as variáveis de decisão aumentam e portanto o lucro aumenta. Porém, Giapetto tem algumas restrições, por exemplo: a cada semana ele tem 100 horas para

fazer acabamentos; a cada semana ele tem 80 horas para fazer carpintaria; a cada semana ele vende no máximo 40 soldados. Todas essas variáveis devem ser mostradas matematicamente na PL, como segue:

$$\text{Horas de acabamento: } 2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \leq 100 \quad (2.38)$$

$$\text{Horas de carpintaria: } 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \leq 80 \quad (2.39)$$

$$\text{Número de soldados: } x_1 \leq 40 \quad (2.40)$$

Os coeficientes para as variáveis de decisão nas restrições são chamados também de coeficientes tecnológicos, isso porque em muitos casos estão relacionados à tecnologia utilizada no processo. O valor encontrado ao lado direito da sentença é chamado de right-hand side (ou rhs) e comumente está relacionado com disponibilidade de recursos.

- Restrições de sinais: Para completar a formulação do problema de programação linear, deve-se especificar se há restrições de sinal, e neste caso pode-se determinar que as variáveis de decisão devem ser não negativas, ou se são irrestritas (podem ser positivas, nulas ou negativas). No caso de Giapetto:

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (2.41)$$

2.4.2. Representação do problema de PL

Combinando todos os resultados obtidos até então, encontra-se a formulação completa do problema de PL:

$$\max(z) = 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \quad (\text{Função objetivo}) \quad (2.42)$$

Sujeito a:

$$2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \leq 100 \quad (\text{Restrição de acabamento}) \quad (2.43)$$

$$1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \leq 80 \quad (\text{Restrição de carpintaria}) \quad (2.44)$$

$$x_1 \leq 40 \quad (\text{Restrição de demanda por soldados}) \quad (2.45)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (\text{Restrições de sinal}) \quad (2.46)$$

Diz-se sujeito a, pois os valores das variáveis de decisão devem respeitar todas as restrições.

2.4.3. Solução do problema de PL

2.4.3.1. Região viável

Um dos conceitos básicos associados à programação linear é o de região viável. Para a definição desse conceito, o termo “ponto” será usado com o significado de conjunto formado pelos valores de cada variável de decisão. Portanto, a região viável é o conjunto de todos os pontos que satisfazem todas as restrições da PL, incluindo as restrições de sinais. Em outras palavras, são todas as combinações de valores para as variáveis de decisão que respeitam as condições impostas pelas equações que definem o problema de PL.

Para um problema de duas variáveis, considerando a restrição de sinal para ambas as variáveis, fica, por exemplo:

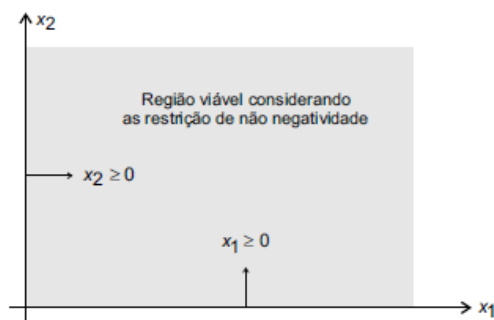


Figura 12 – Região viável com restrições de não negatividade

Colocando-se uma condição de que a variável x_1 deve ser menor ou igual a A :

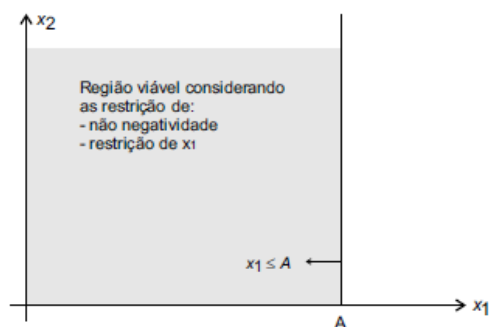


Figura 13 – Região viável com restrição para x_1

Aplicando uma restrição para a variável x_2 em relação a x_1 :

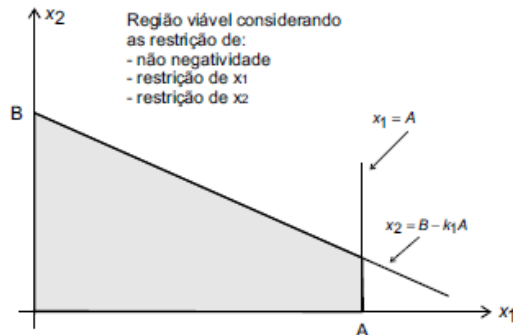


Figura 14 – Região viável com restrição para x_2 em relação a x_1

Colocando outra restrição para x_2 em relação a x_1 :

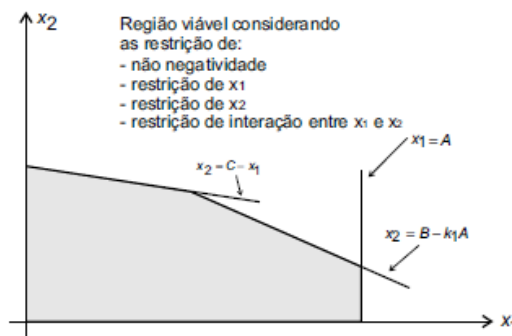


Figura 15 – Região viável com restrição para x_2 em relação a x_1

Portanto, a solução ótima, deve ser encontrada no interior da região viável (destacada em cinza na figura acima). Qualquer solução encontrada fora desta região desrespeitará uma ou mais das restrições do problema.

2.4.3.2. Solução gráfica para duas variáveis

Qualquer problema de PL com duas variáveis pode ser resolvido de forma gráfica. Nestes casos nomeia-se o eixo horizontal de x_1 e o eixo vertical de x_2 , que são as variáveis de decisão. Encontra-se na sequência a região viável, dadas as restrições impostas à PL. No problema de Giapetto por exemplo, a região viável, mostrada na forma gráfica fica:

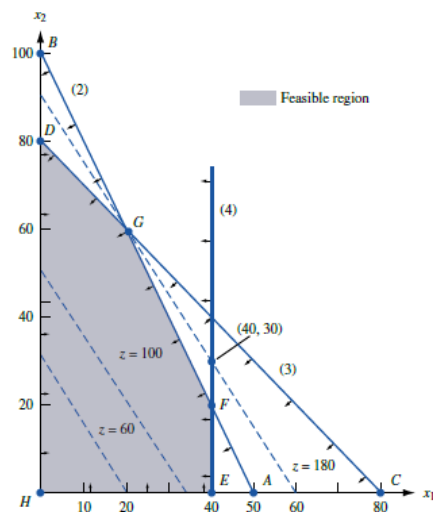


Figura 16 – Região viável para o problema do Giapetto

Após identificada a região viável, parte-se para a determinação do ponto ótimo, que representa a solução ótima do problema. No caso, como deve-se maximizar o valor do lucro semanal, representado pela função z , deve-se encontrar o ponto na região viável para a qual a função $z = 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2$ tenha seu valor máximo.

Para tal, deve-se representar as retas para as quais a função z possua o mesmo valor. Por exemplo, escolhendo o ponto $(20,0)$, para o qual $z = 60$ achamos a reta representada por:

$$x_2 = 30 - \frac{3}{2}x_1 \quad (2.47)$$

E sabe-se que todos os pontos que pertencem a essa reta possuem o valor da função objetivo igual a 60. Ou seja, para qualquer combinação das variáveis x_1 e x_2 , que estejam sobre a reta mencionada, o lucro semanal será de R\$60,00. Como todas as retas que representam as soluções para o problema são do formato:

$$3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = \text{Constante} \quad (2.48)$$

Fica claro que todas possuem a mesma inclinação, bastando portanto deslocar-se perpendicularmente na direção que aumenta o valor da função objetivo (construindo retas paralelas à primeira), até que se tangencie a região viável. O ponto de tangência entre a reta e a região viável será o ponto da solução ótima.

No caso de Giapetto, o ponto ótimo é o ponto representado por G, onde:

$$x_1 = 20 ; x_2 = 60 ; z = R\$180,00 \quad (2.49)$$

2.4.3.3. Solução ótima

Um problema de PL pode ter apenas uma solução ótima, como mostrado anteriormente, pode ter múltiplas soluções ótimas, ou até mesmo ser insolúvel, caso no qual não há solução para as restrições impostas. Graficamente, fica simples de entender, como na solução para a seguinte formulação:

$$\max(z) = 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \quad (2.50)$$

Sujeito a:

$$\frac{1}{40} \cdot x_1 + \frac{1}{60} \cdot x_2 \leq 1 \quad (2.51)$$

$$\frac{1}{50} \cdot x_1 + \frac{1}{50} \cdot x_2 \leq 1 \quad (2.52)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (2.53)$$

A região viável fica determinada por:

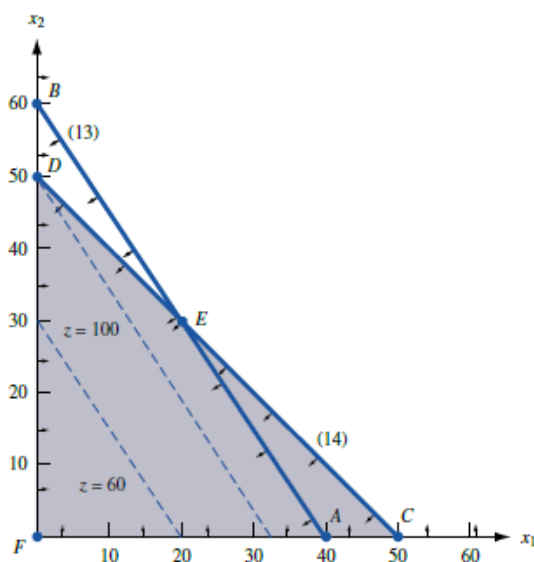


Figura 17 – Região viável com múltiplas soluções

Nota-se que neste caso, a reta que tangencia a região viável é coincidente com o segmento AE, de forma que qualquer combinação entre as variáveis de decisão, que estejam sobre essa reta serão soluções ótimas.

No caso do problema formulado por:

$$\max(z) = 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \quad (2.54)$$

Sujeito a:

$$\frac{1}{40} \cdot x_1 + \frac{1}{60} \cdot x_2 \leq 1 \quad (2.55)$$

$$\frac{1}{50} \cdot x_1 + \frac{1}{50} \cdot x_2 \leq 1 \quad (2.56)$$

$$x_1 \geq 30 \quad (2.57)$$

$$x_2 \geq 20 \quad (2.58)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (2.59)$$

A região viável, que respeite todas as restrições é inexistente, de forma que não há solução ótima e o problema é insolúvel:

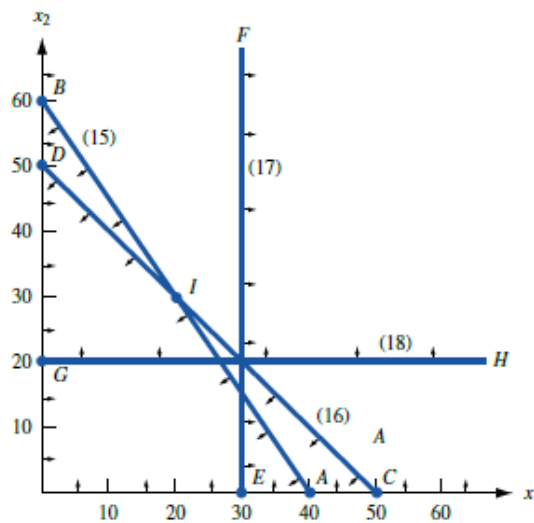


Figura 18 – Região viável inexistente (Problema insolúvel)

2.4.3.4. Minimizando a soma do módulo na função objetivo

Em alguns casos é necessário minimizar a soma de valores absolutos de determinadas variáveis na função objetivo, neste caso, a metodologia a seguir, encontrada em [13] e também utilizada por [5], pode ser utilizada:

Encontrar y_i com $i = 1, \dots, m$ que minimize:

$$\sum_{j=1}^p \left| \sum_{i=1}^m y_i b_{ij} - b_j \right| \quad (2.60)$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^m y_i a_{ij} \geq c_j \quad \text{para } j = 1, \dots, l \quad (2.61)$$

$$\sum_{i=1}^m y_i a_{ij} \geq c_j \quad \text{para } j = l+1, \dots, n \quad (2.62)$$

$$y_i \geq 0 \quad \text{para } i = 1, \dots, k \quad (2.63)$$

$$y_i \text{ irrestrito} \quad \text{para } i = 1, \dots, k \quad (2.64)$$

Para que o problema fique no formato de uma PL, deve-se adicionar mais p variáveis fictícias y_{m+1}, \dots, y_{m+p} e deve-se trocar a função objetivo para:

$$\min(z) = \sum_{j=1}^p y_{m+j} \quad (2.65)$$

Sujeito às restrições:

$$\sum_{i=1}^m y_i b_{ij} - b_j \leq y_{m+j} \quad \text{para } j = 1, \dots, p \quad (2.66)$$

$$-\sum_{i=1}^m y_i b_{ij} - b_j \leq y_{m+j} \quad \text{para } j = 1, \dots, p \quad (2.67)$$

Neste caso, as variáveis fictícias y_{m+1}, \dots, y_{m+p} serão sempre não negativas, mesmo que isto não esteja explícito nas restrições.

2.5. Programação linear aplicada a controle ótimo

Como em [5], será mostrado como um problema de controle ótimo, para um sistema dinâmico linear e de tempo discreto pode ser colocado na forma padrão de um problema de programação linear, partindo-se da representação em espaço de estados.

Considerando um sistema dinâmico de tempo discreto, representado em espaço de estados, tem-se que:

$$x_{(k+1)} = A \cdot x_{(k)} + B \cdot u_{(k)} \quad (2.68)$$

Sendo que:

$x_{(k+1)}$ = Valor do vetor de estados no próximo instante kT

$x_{(k)}$ = Valor do vetor de estados no instante kT

$u_{(k)}$ = Valor do vetor de controle no instante kT

A = Matriz do sistema

B = Matriz de entradas

Para cada instante kT , sendo $k = 0, 1, 2, 3 \dots$ Tem-se portanto:

$$x_{(1)} = Ax_{(0)} + Bu_{(0)}$$

$$\begin{aligned} x_{(2)} &= Ax_{(1)} + Bu_{(1)} = A(Ax_{(0)} + Bu_{(0)}) + Bu_{(1)} \\ &= A^2x_{(0)} + A^1Bu_{(0)} + A^0Bu_{(1)} \end{aligned}$$

$$x_{(3)} = Ax_{(2)} + Bu_{(2)} = \dots$$

\vdots

De forma que para um instante nT qualquer, pode-se escrever:

$$x_{(n)} = A^n x_{(0)} + A^{(n-1)}Bu_{(0)} + A^{(n-2)}Bu_{(1)} + A^{(n-3)}Bu_{(2)} + \dots + A^1Bu_{(n-2)} + A^0Bu_{(n-1)} \quad (2.69)$$

Que pode ser escrito como:

$$x_{(n)} = A^n x_{(0)} + \begin{bmatrix} A^{(n-1)}B & A^{(n-2)}B & A^{(n-3)}B & \dots & A^1B & A^0B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{(0)} \\ u_{(1)} \\ \vdots \\ u_{(n-2)} \\ u_{(n-1)} \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

Ou então:

$$x_{(n)} = Fx_{(0)} + GU \quad (2.71)$$

Sendo que neste caso:

$$F = A^n \quad (2.72)$$

$$G = \begin{bmatrix} A^{(n-1)}B & A^{(n-2)}B & A^{(n-3)}B & \dots & A^1B & A^0B \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

$$U = \begin{bmatrix} u_{(0)} \\ u_{(1)} \\ \vdots \\ u_{(n-2)} \\ u_{(n-1)} \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

É interessante notar, que a partir dessa última relação torna-se possível representar o modelo dinâmico na forma de um problema de programação linear, que inclui as condições iniciais $x_{(0)}$ e $x_{(n)}$. O problema fica descrito por:

$$GU = x_{(n)} - Fx_{(0)} \quad (2.75)$$

E fazendo com que:

$$A = G \quad (2.76)$$

$$X = U \quad (2.77)$$

$$B = x_{(n)} - Fx_{(0)} \quad (2.78)$$

Fica que:

$$AX = B \quad (2.79)$$

E assim voltamos ao formato padrão para a PL, sendo que agora temos o vetor de controle no lugar das variáveis de decisão. Se houver restrições para o histórico de controle, que possam ser representadas por desigualdades elas podem ser também descritas por:

$$A_1X_1 \geq B_1 \quad (2.80)$$

Desta forma, a dinâmica do sistema foi descrita por restrições lineares entre os estados e o vetor de controle. Falta ainda, definir qual a função objetivo a ser resolvida na PL. Esta função objetivo dependerá do problema de otimização que se pretende resolver.

3. METODOLOGIA

A metodologia segue as etapas ordenadas a seguir:

- Determinação de um modelo físico que seja representativo do problema, mas ao mesmo tempo simples o suficiente para que possa ser equacionado e resolvido;
- Obtenção de um modelo matemático que descreva o comportamento do modelo físico. Nesta etapa, espera-se obter um conjunto de equações diferenciais, caso seja necessário essas devem ser linearizadas para permitir a posterior resolução;
- Colocação do modelo matemático no formato de espaço de estados para a simulação do comportamento do sistema e posterior aplicação das técnicas de controle ótimo;
- Obtenção das leis de controle e análise dos resultados;
- Comparação de resultados com os de um modelo matemático mais simples para o mesmo modelo físico.

Deve-se concluir, ao final, se o modelo mais complexo traz vantagens em relação ao modelo mais simples, ou se as simplificações pouco alteram os resultados finais.

4. ESTUDO DE CASO

4.1. Modelo físico

Para o estudo da aplicação de controle ótimo na determinação da trajetória imposta a uma carga movimentada por uma ponte rolante, considerando a flexibilidade do cabo de movimentação e de forma a minimizar as vibrações da carga, é necessário determinar um modelo físico que seja representativo do modelo real.

O modelo físico adotado neste trabalho pode ser visto na figura a seguir:

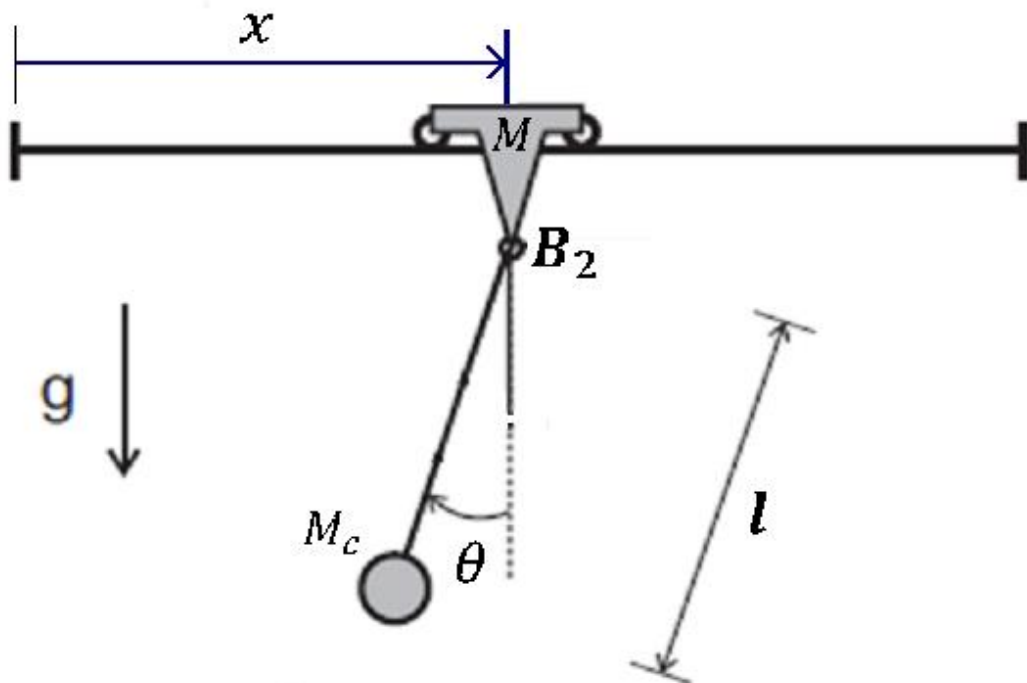


Figura 19 - Modelo físico para o estudo de caso [5]

O modelo é composto de uma viga engastada em suas extremidades, representando o corpo da ponte rolante, considerada rígida. Preso à viga e apoiado sobre rodas, está o carro de movimentação, e suportado por ele a carga em balanço. O carro será representado por um bloco de massa concentrada. Além disto, será utilizado um modelo de cabo como o apresentado na fig. 19:

$$\dot{r}_{carro} = \dot{x} \cdot \vec{i} \quad (4.2)$$

De forma que a energia cinética fica:

$$T_{carro} = \frac{M \cdot \dot{r}_{carro}^2}{2} = \frac{M \cdot \dot{x}^2}{2} \quad (4.3)$$

4.2.2.2. Energia cinética da carga

A posição da carga pode ser descrita por:

$$r_{carga} = (x - l \cdot \sin\theta) \cdot \vec{i} + (l \cdot \cos\theta) \cdot \vec{j} \quad (4.4)$$

Derivando em relação ao tempo:

$$\dot{r}_{carga} = (\dot{x} - \dot{l} \cdot \sin\theta - \dot{\theta} \cdot l \cdot \cos\theta) \cdot \vec{i} + (\dot{l} \cdot \cos\theta - l \cdot \dot{\theta} \cdot \sin\theta) \cdot \vec{j} \quad (4.5)$$

De forma que a energia cinética fica:

$$T_{carga} = \frac{M_c \cdot \dot{r}_{carga}^2}{2} = \frac{M_c}{2} [\dot{x}^2 + \dot{l}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 - 2l\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta - 2\dot{x}\dot{l}\sin\theta] \quad (4.6)$$

4.2.2.3. Energia potencial gravitacional da carga

Para a energia potencial fica (tomando a linha média da viga como referencial para a energia potencial gravitacional):

$$V_g = M_c g \cdot l \cdot \cos\theta \quad (4.7)$$

4.2.2.4. Energia potencial de deformação

Para a energia potencial de deformação do cabo:

$$V_d = \frac{k(l-l_0)^2}{2} \quad (4.8)$$

4.2.2.5. Função de Rayleigh das perdas no cabo

A energia de dissipação no cabo pode ser escrita por:

$$R = \frac{B_1 \dot{l}^2}{2} + \frac{B_2 \dot{\theta}^2}{2} \quad (4.9)$$

4.2.2.6. Lagrangeana do sistema

A Lagrangeana, portanto:

$$L = \frac{M \cdot \dot{x}^2}{2} + \frac{M_c}{2} [\dot{x}^2 + \dot{l}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 - 2l\dot{\theta}\dot{x} \cos \theta - 2\dot{x}\dot{l} \sin \theta] - M_c g \cdot l \cdot \cos \theta - \frac{k(l-l_0)^2}{2} \quad (4.10)$$

4.2.3. Equações diferenciais

4.2.3.1. Variável x

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = (M + M_c) \dot{x} - M_c (l \dot{\theta} \cos \theta + \dot{l} \sin \theta) \quad (4.11)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = (M + M_c) \ddot{x} + M_c (-l \ddot{\theta} \cos \theta + l \dot{\theta}^2 \sin \theta - \ddot{l} \sin \theta - \dot{l} \dot{\theta} \cos \theta) \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (4.14)$$

$$Q_x = F_t \quad (4.15)$$

Que resulta na equação diferencial:

$$(M + M_c) \ddot{x} + M_c (-l \ddot{\theta} \cos \theta + l \dot{\theta}^2 \sin \theta - \ddot{l} \sin \theta - \dot{l} \dot{\theta} \cos \theta) = F_t \quad (4.16)$$

Linearizando os termos em θ , considerando pequenos deslocamentos angulares, tem-se que:

$$\cos \theta \approx 1 \quad ; \quad \sin \theta \approx \theta \quad ; \quad \dot{\theta}^2 \approx 0$$

Resulta:

$$(M + M_c) \ddot{x} - M_c (l \ddot{\theta} + \ddot{l} \theta + 2 \dot{l} \dot{\theta}) = F_t \quad (4.17)$$

Que é a primeira equação diferencial do sistema.

4.2.3.2. Variável l

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{l}} \right) = M_c (\dot{l} - \dot{x} \sin \theta) \quad (4.18)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{l}} \right) = M_c(\ddot{l} - \ddot{x} \sin\theta - \dot{x}\dot{\theta} \cos\theta) \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial L}{\partial l} = M_c(l\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}\dot{x}\cos\theta - g \cos\theta) - k(l - l_0) \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{l}} = B_1 \dot{l} \quad (4.21)$$

$$Q_l = 0 \quad (4.22)$$

Que resulta na equação diferencial:

$$M_c(\ddot{l} - \ddot{x} \sin\theta - l\dot{\theta}^2 + g \cos\theta) + k(l - l_0) + B_1 \dot{l} = 0 \quad (4.23)$$

Linearizando os termos em θ , considerando pequenos deslocamentos angulares, tem-se que:

$$\cos\theta \approx 1 \quad ; \quad \sin\theta \approx \theta \quad ; \quad \dot{\theta}^2 \approx 0$$

Resulta:

$$M_c(\ddot{l} - \ddot{x}\theta + g) + k(l - l_0) + B_1 \dot{l} = 0 \quad (4.24)$$

Que é a segunda equação diferencial do sistema.

4.2.3.3. Variável θ

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = M_c(l^2 \dot{\theta} - l\dot{x} \cos\theta) \quad (4.25)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = M_c(2l\dot{l}\dot{\theta} + l^2\ddot{\theta} - \dot{l}\dot{x} \cos\theta - l\ddot{x} \cos\theta + l\dot{x}\dot{\theta} \sin\theta) \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = M_c(l\dot{x}\dot{\theta} \sin\theta - \dot{x}l \cos\theta + gl \sin\theta) \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} = B_2 \dot{\theta} \quad (4.28)$$

$$Q_{\theta} = 0 \quad (4.29)$$

Que resulta na equação diferencial:

$$M_c(2l\dot{l}\dot{\theta} + l^2\ddot{\theta} - l\ddot{x} \cos\theta - gl \sin\theta) + B_2\dot{\theta} = 0 \quad (4.30)$$

Linearizando os termos em θ , considerando pequenos deslocamentos angulares, tem-se que:

$$\cos\theta \approx 1 \quad ; \quad \sin\theta \approx \theta$$

Resulta:

$$M_c(2l\dot{l}\dot{\theta} + l^2\ddot{\theta} - l\ddot{x} - gl\theta) + B_2\dot{\theta} = 0 \quad (4.31)$$

Que é a terceira equação diferencial do sistema.

4.2.3.4. Sistema de equações

O sistema de equações fica definido, portanto:

$$\begin{cases} (M + M_c) \ddot{x} - M_c(l\ddot{\theta} + \ddot{l}\theta + \dot{l}\dot{\theta}) = F_t \\ M_c(\ddot{l} - \ddot{x}\theta + g) + k(l - l_0) + B_1\dot{l} = 0 \\ M_c(2l\dot{l}\dot{\theta} + l^2\ddot{\theta} - l\ddot{x} - gl\theta) + B_2\dot{\theta} = 0 \end{cases} \quad (4.32)$$

4.2.3.5. Demais simplificações

Considerando ainda que as oscilações nas variáveis “ l ” e “ θ ” são pequenas em torno do ponto de equilíbrio, é possível dizer que:

$$l = l_{eq} + \delta l \quad (4.33)$$

$$\theta = \theta_{eq} + \delta\theta \quad (4.34)$$

Sendo que δl e $\delta\theta$ pequenas perturbações em relação ao ponto de equilíbrio. A mesma hipótese não é válida para a variável “ x ”, pois ela sofrerá grandes deslocamentos.

As derivadas ficam:

$$\dot{l} = \dot{l}_{eq} + \delta\dot{l} \quad ; \quad \ddot{l} = \ddot{l}_{eq} + \delta\ddot{l} \quad ; \quad \dot{\theta} = \dot{\theta}_{eq} + \delta\dot{\theta} \quad ; \quad \ddot{\theta} = \ddot{\theta}_{eq} + \delta\ddot{\theta} \quad (4.35)$$

Aplicando nos termos das equações temos que:

$$\bullet \quad \ddot{l} \cdot \theta = 0 \quad (4.36)$$

$$\bullet \quad \dot{l} \cdot \dot{\theta} = 0 \quad (4.37)$$

$$\bullet \quad l \cdot \ddot{\theta} = l_{eq} \cdot \delta \ddot{\theta} \quad (4.38)$$

A primeira equação fica portanto:

$$(\mathbf{M} + \mathbf{M}_c)\ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{M}_c \cdot l_{eq} \cdot \delta \ddot{\theta} = \mathbf{F}_T \quad (4.39)$$

$$\bullet \quad \ddot{l} = \delta \ddot{l} \quad (4.40)$$

$$\bullet \quad \ddot{x}\theta = \ddot{x} \cdot \delta \theta \quad (4.41)$$

$$\bullet \quad l - l_0 = l_{eq} + \delta l - l_0 \quad (4.42)$$

$$\bullet \quad \dot{l} = \delta \dot{l} \quad (4.43)$$

A segunda equação fica portanto:

$$\mathbf{M}_c(\delta \ddot{l} - \ddot{x} \cdot \delta \theta + g) + k(l_{eq} + \delta l - l_0) + B_1 \delta \dot{l} = 0 \quad (4.44)$$

$$\bullet \quad 2l\dot{l}\dot{\theta} = 0 \quad (4.45)$$

$$\bullet \quad l^2 \ddot{\theta} = l_{eq}^2 \cdot \delta \ddot{\theta} \quad (4.46)$$

$$\bullet \quad l\ddot{x} = \ddot{x} \cdot l_{eq} + \ddot{x} \cdot \delta l \quad (4.47)$$

$$\bullet \quad gl\theta = g \cdot l_{eq} \cdot \delta \theta \quad (4.48)$$

$$\bullet \quad \dot{\theta} = \delta \dot{\theta} \quad (4.49)$$

A terceira equação fica portanto:

$$\mathbf{M}_c(l_{eq}^2 \cdot \delta \ddot{\theta} + \ddot{x} \cdot l_{eq} + \ddot{x} \cdot \delta l + g \cdot l_{eq} \cdot \delta \theta) + B_2 \delta \dot{\theta} = 0 \quad (4.50)$$

O sistema de equações fica definido, portanto:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{M} + \mathbf{M}_c)\ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{M}_c \cdot l_{eq} \cdot \delta \ddot{\theta} = \mathbf{F}_T \\ \mathbf{M}_c(\delta \ddot{l} - \ddot{x} \cdot \delta \theta + g) + k(l_{eq} + \delta l - l_0) + B_1 \delta \dot{l} = 0 \\ \mathbf{M}_c(l_{eq}^2 \cdot \delta \ddot{\theta} + \ddot{x} \cdot l_{eq} + \ddot{x} \cdot \delta l + g \cdot l_{eq} \cdot \delta \theta) + B_2 \delta \dot{\theta} = 0 \end{array} \right. \quad (4.51)$$

Os termos $\ddot{x} \cdot \delta\theta$ e $\ddot{x} \cdot \delta l$ fazem com que o sistema ainda seja não-linear. A solução proposta neste caso será a de desprezar os termos, dado que são multiplicações de derivadas e devem ser muito próximos a zero.

4.2.3.6. Sistema completo final

O sistema de equações final a ser resolvido fica portanto:

$$\begin{cases} (M + M_c)\ddot{x} - M_c \cdot l_{eq} \cdot \delta\ddot{\theta} = F_T \\ M_c(\delta\ddot{l} + g) + k(l_{eq} + \delta l - l_0) + B_1\delta\dot{l} = 0 \\ M_c(l_{eq}^2 \cdot \delta\ddot{\theta} + \ddot{x} \cdot l_{eq} + g \cdot l_{eq} \cdot \delta\theta) + B_2 \delta\dot{\theta} = 0 \end{cases} \quad (4.52)$$

4.3. Solução do sistema completo sem controle

4.3.1. Espaço de estados

Para colocar o sistema em espaço de estados usa-se o seguinte artifício:

$$x = q_1 ; \quad \dot{x} = q_2 ; \quad \delta\theta = q_3 ; \quad \delta\dot{\theta} = q_4 ; \quad \delta l = q_5 ; \quad \delta\dot{l} = q_6 \quad (4.53)$$

O sistema de equações deduzido é:

$$\begin{cases} (M + M_c) \cdot q_2 - M_c \cdot l_{eq} \cdot q_4 = F_T \\ M_c(q_6 + g) + k(l_{eq} + q_5 - l_0) + B_1 \cdot q_6 = 0 \\ M_c(l_{eq}^2 \cdot q_4 + q_2 \cdot l_{eq} + g \cdot l_{eq} \cdot q_3) + B_2 \cdot q_4 = 0 \end{cases} \quad (4.54)$$

Na forma matricial o sistema pode ser representado portando:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (M + M_c) & 0 & -(M_c \cdot l_{eq}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & l_{eq} & 0 & l_{eq}^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k & -B_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -(g \cdot l_{eq}) & -\left(\frac{B_2}{M_c}\right) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ F_T \\ 0 \\ -[M_c \cdot g + k \cdot (l_{eq} - l_0)] \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (4.55)$$

Neste sistema as variáveis não estão desacopladas, para fazer isto sejam:

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (M + M_C) & 0 & -(M_C \cdot l_{eq}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_C \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & l_{eq} & 0 & l_{eq}^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k & -B_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -(g \cdot l_{eq}) & -\left(\frac{B_2}{M_C}\right) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 \\ F_T \\ 0 \\ -[M_C \cdot g + k \cdot (l_{eq} - l_0)] \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

Fazemos então:

$$[N] = [J]^{-1} \quad (4.59)$$

Então:

$$[A] = [N][K] \quad ; \quad [B] = [N][M] \quad (4.60)$$

O sistema em espaço de estados, que é do formato:

$$\{\dot{x}\} = [A]\{x\} + [B]\{u\} \quad (4.61)$$

Fica portando:

$$[J]^{-1}[J]\{\dot{x}\} = [J]^{-1}[K]\{x\} + [J]^{-1}[M]\{u\} \quad (4.62)$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{bmatrix} + [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]u \quad (4.63)$$

4.3.2. Simulação do sistema completo sem controle

4.3.2.1. Sistema sem atenuação

O sistema foi simulado para o caso sem atenuação, ou seja, as constantes: dissipação do cabo (B_1) e o atrito viscoso (B_2) foram consideradas nulas para que o comportamento do sistema pudesse ser estudado. Abaixo seguem os resultados obtidos para as variáveis de estado, dada uma excitação do tipo impulso:

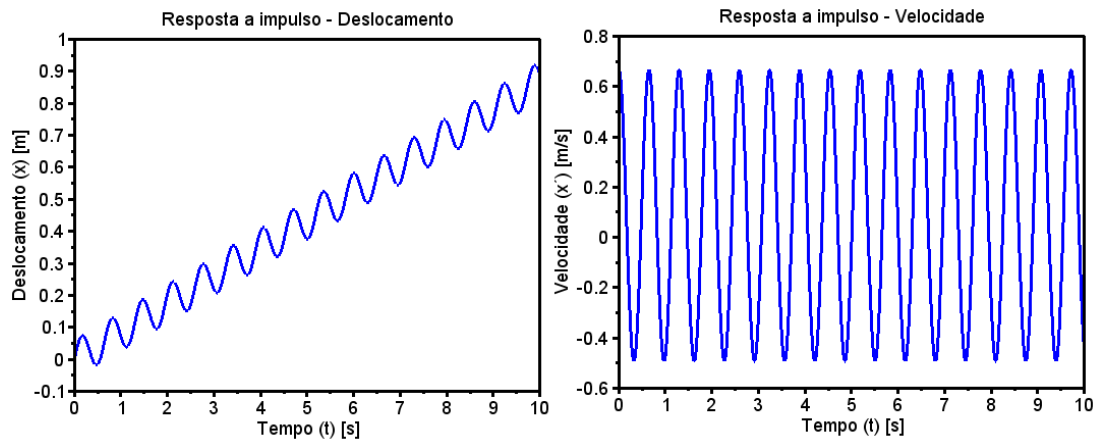


Figura 21 – Posição e velocidade do carro, para modelo completo sem atenuação

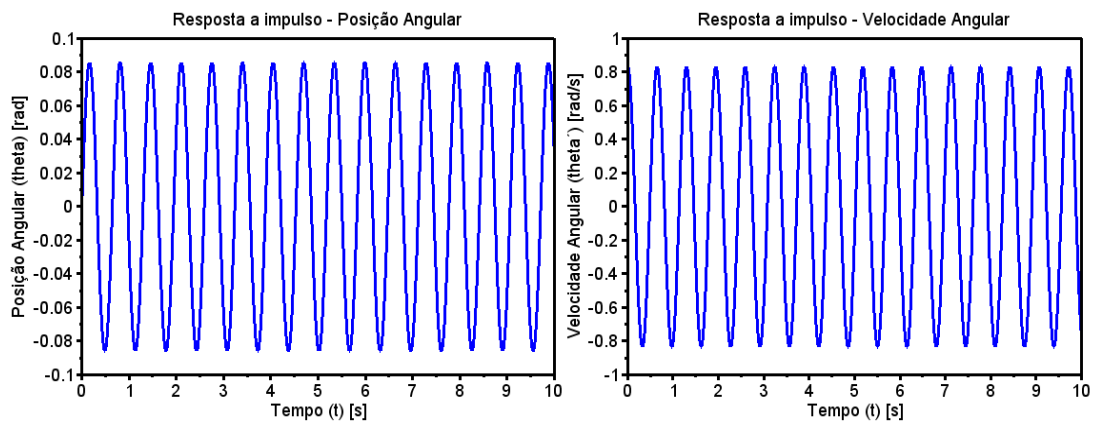


Figura 22 – Posição e velocidade angulares, para modelo completo sem atenuação

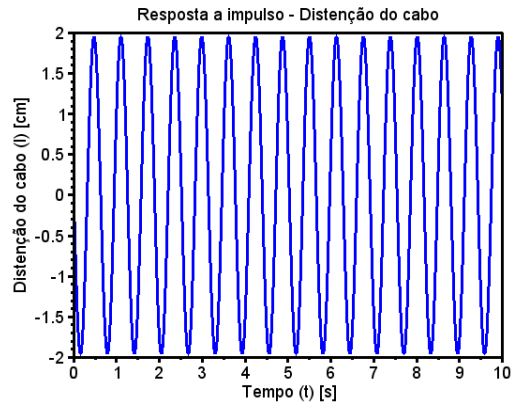


Figura 23 – Distensão do cabo de aço para modelo completo sem atenuação

Fica evidente a boa representação do sistema, que se comportou como era esperado, com a carga oscilando de forma senoidal após ser perturbada.

4.3.2.2. Sistema com atenuação

O mesmo sistema foi testado, porém com as variáveis B_1 e B_2 diferentes de zero. Neste caso, para uma excitação do tipo impulso, o resultado fica:

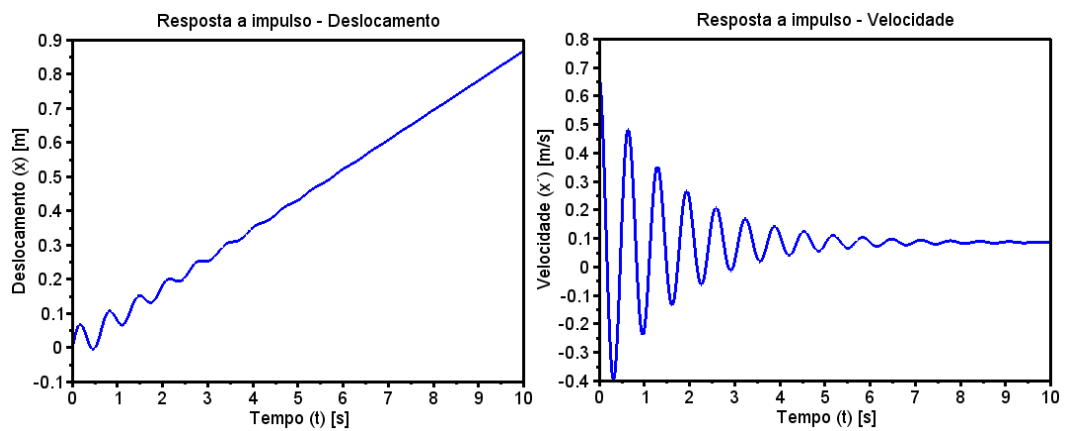


Figura 24 – Posição e velocidade do carro, para modelo completo com atenuação

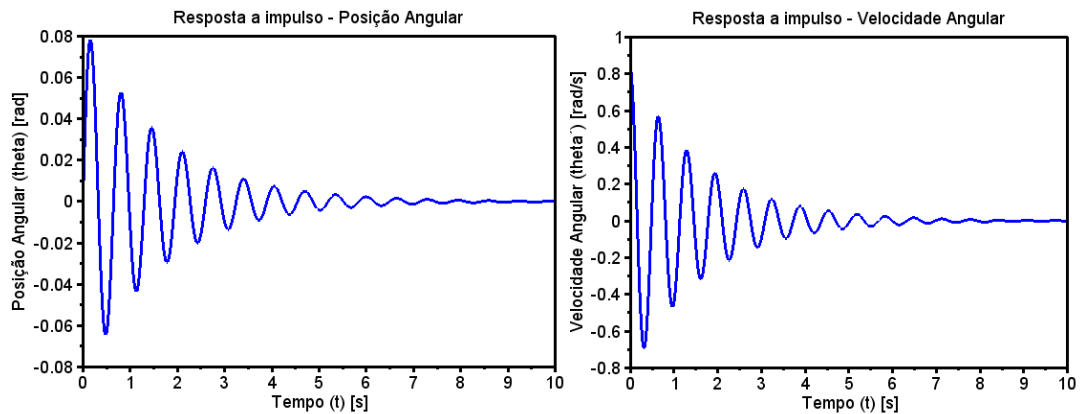


Figura 25 – Posição e velocidade angulares, para modelo completo com atenuação

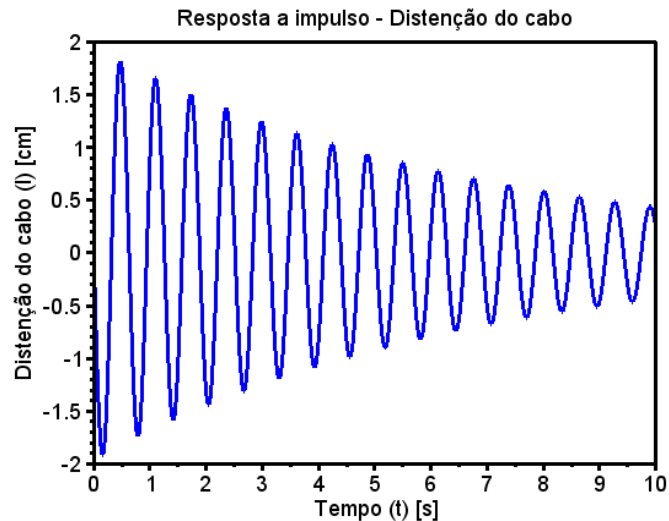


Figura 26 –Distensão do cabo de aço para modelo completo com atenuação

Neste caso a inserção da atenuação faz com que a carga inicie um movimento de oscilação ao ser perturbada, mas tem sua energia dissipada com o decorrer do tempo, o que vai reduzindo a amplitude de oscilação até que ela fique praticamente nula. Com isso verifica-se que o sistema tem o comportamento esperado e portanto está validado.

4.4. Modelo matemático simplificado sem controle

4.4.1. Dedução do modelo simplificado

Partindo da Lagrangeana do sistema, agora considerando o cabo inextensível e portanto com todas as derivadas de l em relação ao tempo serão nulas.

$$L = \frac{M \cdot \dot{x}^2}{2} + \frac{M_c}{2} [\dot{x}^2 + \dot{l}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 - 2l\dot{\theta}\dot{x} \cos \theta - 2\dot{x}\dot{l} \sin \theta] - M_c g \cdot l \cdot \cos \theta - \frac{k(l-l_0)^2}{2} \quad (4.64)$$

Anulando as derivadas (e como $l = l_0$):

$$L = \frac{M \cdot \dot{x}^2}{2} + \frac{M_c}{2} [\dot{x}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 - 2l\dot{\theta}\dot{x} \cos \theta] - M_c g \cdot l \cdot \cos \theta \quad (4.65)$$

4.4.1.1. Variável x

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = (M + M_c) \dot{x} \quad (4.66)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = (M + M_c) \ddot{x} + M_c (-l\ddot{\theta} \cos \theta + l \dot{\theta}^2 \sin \theta) \quad (4.67)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (4.68)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (4.69)$$

$$Q_x = F_t \quad (4.70)$$

Que resulta na equação diferencial:

$$(M + M_c) \ddot{x} + M_c (-l\ddot{\theta} \cos \theta + l \dot{\theta}^2 \sin \theta) = F_t \quad (4.71)$$

Linearizando os termos em θ , considerando pequenos deslocamentos angulares, tem-se que:

$$\cos \theta \approx 1 \quad ; \quad \sin \theta \approx \theta \quad ; \quad \dot{\theta}^2 \approx 0$$

Resulta:

$$(M + M_c) \ddot{x} - M_c l \ddot{\theta} = F_t \quad (4.72)$$

Que é a primeira equação diferencial do sistema.

4.4.1.2. Variável θ

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = M_c (l^2 \dot{\theta} - l \dot{x} \cos \theta) \quad (4.73)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = M_c(l^2 \ddot{\theta} - l \ddot{x} \cos \theta + l \dot{x} \dot{\theta} \sin \theta) \quad (4.74)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = M_c(l \dot{x} \dot{\theta} \sin \theta - gl \sin \theta) \quad (4.75)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} = B_2 \dot{\theta} \quad (4.76)$$

$$Q_\theta = 0 \quad (4.77)$$

Que resulta na equação diferencial:

$$M_c(l^2 \ddot{\theta} - l \ddot{x} \cos \theta - gl \sin \theta) + B_2 \dot{\theta} = 0 \quad (4.78)$$

Linearizando os termos em θ , considerando pequenos deslocamentos angulares, tem-se que:

$$\cos \theta \approx 1 \quad ; \quad \sin \theta \approx \theta$$

Resulta:

$$M_c(l^2 \ddot{\theta} - l \ddot{x} - gl \theta) + B_2 \dot{\theta} = 0 \quad (4.79)$$

Que é a segunda equação diferencial do sistema.

4.4.2. O modelo simplificado em espaço de estados

O problema já em espaço de estados:

$$x = q_1 \quad ; \quad \dot{x} = q_2 \quad ; \quad \theta = q_3 \quad ; \quad \dot{\theta} = q_4 \quad (4.80)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (M + M_c)/M_c & 0 & -l_0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -l_0 & 0 & l_0^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -(g \cdot l_0) & -\left(\frac{B_2}{M_c}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ F_T/M_c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (4.81)$$

Neste sistema as variáveis não estão desacopladas, para fazer isto sejam:

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (M + M_C)/M_C & 0 & -l_0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -l_0 & 0 & l_0^2 \end{bmatrix} \quad (4.82)$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -(g \cdot l_0) & -\left(\frac{B_2}{M_C}\right) \end{bmatrix} \quad (4.83)$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 \\ F_T/M_C \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.84)$$

Fazemos então:

$$[N] = [J]^{-1} \quad (4.85)$$

Então:

$$[A] = [N][K] \quad ; \quad [B] = [N][M] \quad (4.86)$$

O sistema em espaço de estados, que é do formato:

$$\{\dot{x}\} = [A]\{x\} + [B]\{u\} \quad (4.87)$$

Fica portando:

$$[J]^{-1}[J]\{\dot{x}\} = [J]^{-1}[K]\{x\} + [J]^{-1}[M]\{u\} \quad (4.88)$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} + [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]u \quad (4.89)$$

4.4.3. Simulação do sistema simplificado sem controle

O sistema simplificado também foi testado com as variáveis B_1 e B_2 diferentes de zero. Neste caso, para uma excitação do tipo impulso, o resultado fica:

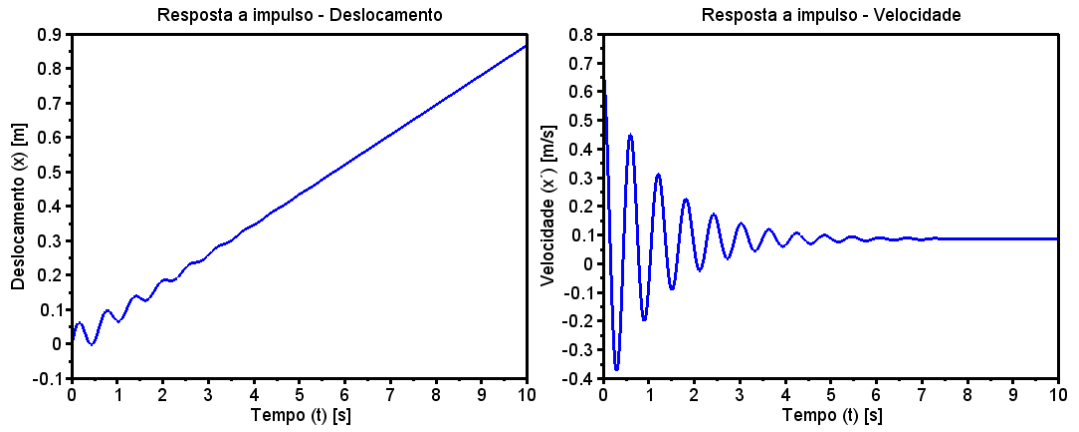


Figura 27 – Posição e velocidade do carro, para modelo simplificado com atenuação

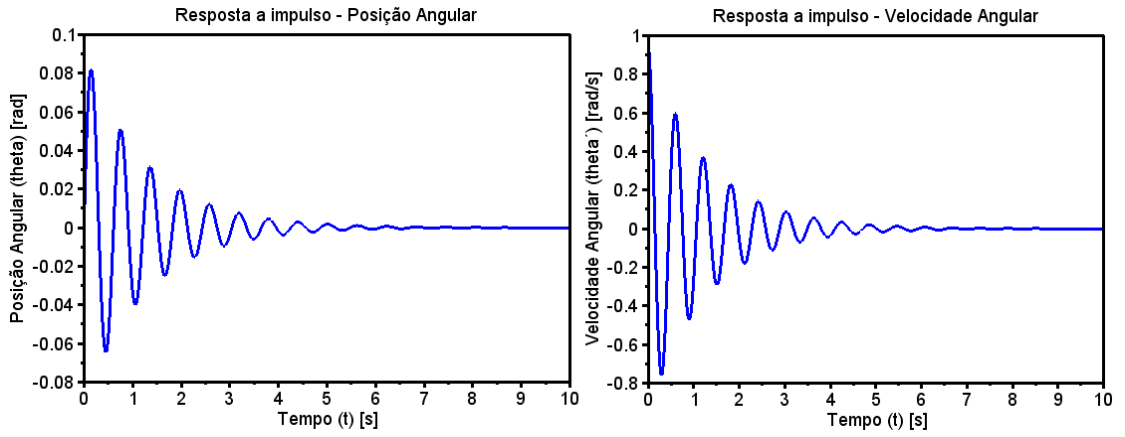


Figura 28 – Posição e velocidade angulares, para modelo simplificado com atenuação

Os resultados são muito similares aos obtidos no caso do modelo completo, comparativos e explicação serão mostrados em tópicos posteriores.

4.5. Comparativo entre modelos

Primeiramente para entender as diferenças entre os modelos, serão observados seus sistemas de equações. Sendo que para o modelo completo, o modelo matemático é:

$$\begin{cases} (M + M_c)\ddot{x} - M_c \cdot l_{eq} \cdot \delta\ddot{\theta} = F_T \\ M_c(l_{eq}^2 \cdot \delta\ddot{\theta} + \ddot{x} \cdot l_{eq} + g \cdot l_{eq} \cdot \delta\theta) + B_2 \delta\dot{\theta} = 0 \\ M_c(\delta\ddot{l} + g) + k(l_{eq} + \delta l - l_0) + B_1 \delta\dot{l} = 0 \end{cases} \quad (4.90)$$

E para o modelo simplificado:

$$\begin{cases} (M + M_c)\ddot{x} - M_c \cdot l_0 \cdot \ddot{\theta} = F_T \\ M_c(l_0^2 \cdot \ddot{\theta} + \ddot{x} \cdot l_0 + g \cdot l_0 \cdot \theta) + B_2 \dot{\theta} = 0 \end{cases} \quad (4.91)$$

Nota-se portanto, que as duas primeiras equações de ambos são iguais, sendo o único ponto em que se diferem o comprimento l considerado. No caso do modelo completo, é utilizado o comprimento considerando-se a deformação inicial, enquanto, no modelo simplificado, é usado apenas o comprimento inicial.

O ponto mais importante de diferenciação entre os modelos é a terceira equação do modelo completo, que rege o movimento (deformação) ao longo do cabo de aço. Observando essa equação percebe-se que ela é independente das outras, pois só possui constantes e termos em l . Ou seja, após as simplificações impostas ao modelo não-linear, a relação entre l e as outras variáveis foi perdida.

Abaixo estão os vetores da diferença entre estados para os dois modelos:

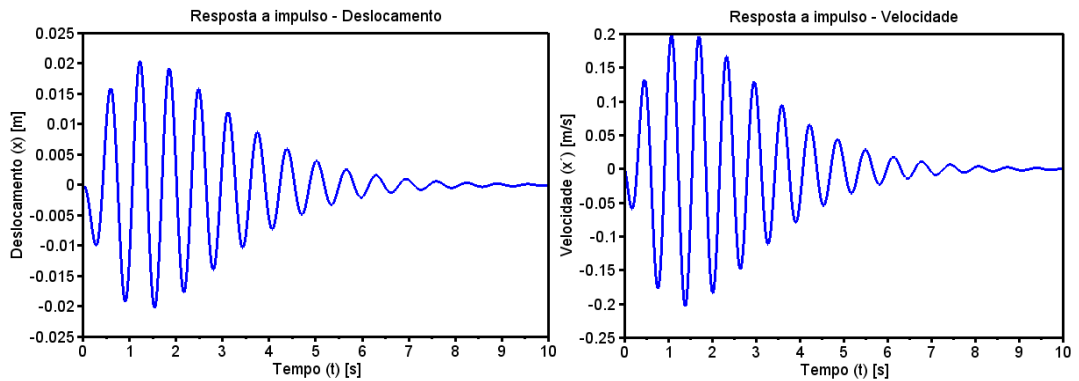


Figura 29 – Diferenças entre os modelos – Posição e velocidade do carro

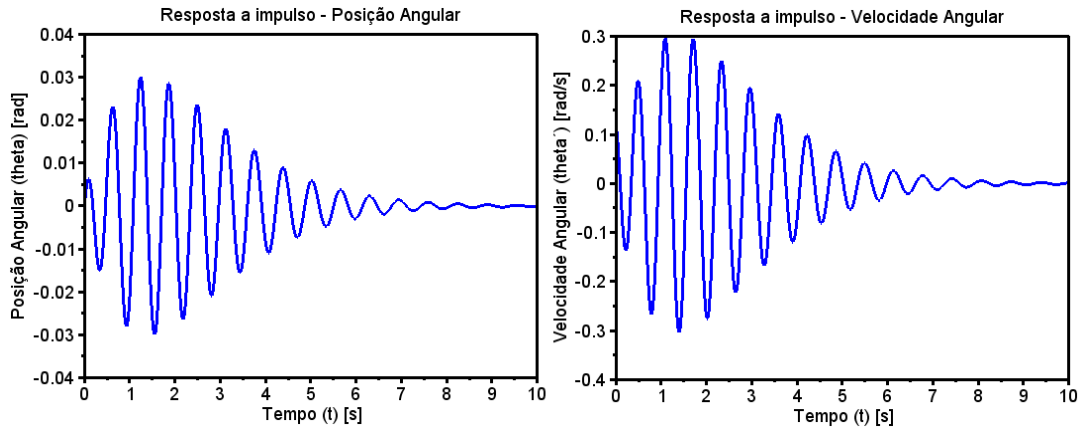


Figura 30 – Diferenças entre os modelos – Posição e velocidade angulares

São pequenas diferenças nos vetores relacionados à posição do carro. No caso da posição angular, há uma pequena diferença de período de oscilação.

5. CONTROLE

5.1. Definição do problema de programação linear

5.1.1. Determinação da função objetivo

O critério para a otimização do sistema será a movimentação feita entre dois pontos, de forma que seja feito o menor esforço de controle e no menor tempo possível. Como foi explicado na introdução teórica, dado o sistema colocado em espaço de estados, as condições iniciais e finais, as equações são rearranjadas na forma; ver Eq. 5.3:

$$GU = x_{(n)} - Fx_{(0)} \quad (5.1)$$

Com as definições:

$$F = A^n \quad (5.2)$$

$$G = [A^{(n-1)}B \ A^{(n-2)}B \ A^{(n-3)}B \ \dots \ A^1B \ A^0B] \quad (5.3)$$

$$U = \begin{bmatrix} u_{(0)} \\ u_{(1)} \\ \vdots \\ u_{(n-2)} \\ u_{(n-1)} \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Dessa forma, os estados inicial e final estão previamente definidos, de modo que a variável livre do sistema é a lei de controle, ou seja, as entradas de controle $u(1)$, $u(2)$, ..., $u(t)$. Com isso fica claro que não é possível inserir as variáveis de estado na função objetivo, sendo que se houver limites esses devem ser verificados ao fim do processo. Para a determinação do tempo mínimo, o processo é externo à PL e iterativo: partindo-se de um intervalo $T = 15\text{ms}$ e adicionando um intervalo incremental, até que todas as condições impostas sejam atendidas. Entendidos todos esses pontos, pode-se definir a função objetivo da PL:

$$\min(J) = |u(1)| + |u(2)| + \dots + |u(N-1)| + |u(N)| \quad (5.5)$$

Como visto anteriormente, problema do módulo na função objetivo pode ser resolvida com a inserção de N variáveis fictícias e a introdução de $2N$ desigualdades ao problema, ficando:

$$\min(J) = u(1 + N) + u(2 + N) + \dots + u(2N - 1) + u(2N) \quad (5.6)$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} u(1) &\leq u(1 + N) \quad ; \quad -u(1) \leq u(1 + N) \\ u(2) &\leq u(2 + N) \quad ; \quad -u(2) \leq u(2 + N) \\ &\vdots \\ u(N - 1) &\leq u(2N - 1) \quad ; \quad -u(N - 1) \leq u(2N - 1) \\ u(N) &\leq u(2N) \quad ; \quad -u(N) \leq u(2N) \end{aligned} \quad (5.7)$$

5.1.2. Determinação das restrições

Como restrições, além das introduzidas pelo artifício da função objetivo e das restrições do sistema, representadas pela equação $GU = x_{(n)} - Fx_{(0)}$, serão introduzidas restrições físicas ao sistema como em [5]:

$$\text{Velocidade máxima do carro} = 2\text{m/s}. \therefore v_{max} \leq 2\text{m/s} \quad (5.8)$$

$$\text{Aceleração máxima do carro} = 1\text{m/s}^2. \therefore a_{max} \leq 1\text{m/s}^2 \quad (5.9)$$

5.1.3. Condições iniciais e finais

O sistema deve partir do repouso e a posição inicial será tomada como referência. Na posição final a velocidade de oscilação da carga deve ser nula, assim como esta deve estar na posição vertical. O carro deverá estar em repouso na posição final. Assim, os vetores para as condições inicial e final são:

$$x_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^t \quad (5.10)$$

$$x_f = [P \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^t \quad (5.11)$$

A posição final testada será $P = 2,2\text{m}$.

5.1.4. Descrição completa no formato de PL

5.1.4.1. Modelo completo no formato de PL

A descrição completa no formato de PL:

$$\min(J) = u(1 + N) + u(2 + N) + \dots + u(2N - 1) + u(2N) \quad (5.12)$$

Sujeito a:

$$GU = x_{(n)} - Fx_{(0)} \quad (5.13)$$

$$u(1) \leq u(1+N) \leq 1 * \frac{M_c}{F_t} \quad ; \quad -u(1) \leq u(1+N) \leq 1 * \frac{M_c}{F_t}$$

$$u(2) \leq u(2+N) \leq 1 * \frac{M_c}{F_t} \quad ; \quad -u(2) \leq u(2+N) \leq 1 * \frac{M_c}{F_t}$$

$$\vdots \quad (5.14)$$

$$u(N-1) \leq u(2N-1) \leq 1 * \frac{M_c}{F_t} \quad ; \quad -u(N-1) \leq u(2N-1) \leq 1 * \frac{M_c}{F_t}$$

$$u(N) \leq u(2N) \leq 1 * \frac{M_c}{F_t} \quad ; \quad -u(N) \leq u(2N) \leq 1 * \frac{M_c}{F_t}$$

$$x_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^t \quad (5.15)$$

$$x_f = [2.2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^t \quad (5.16)$$

5.1.4.2. Modelo simplificado no formato de PL

O modelo simplificado no formato de PL é exatamente igual ao do modelo completo, sendo que os vetores de estado iniciais e finais são de dimensão 4x1 e as matrizes A e B do sistema são as matrizes para o sistema simplificado.

5.2. Simulação do problema com controle

Para a determinação do tempo mínimo, será usado um intervalo de tempo discreto $T = 15ms$. Inicialmente $N=1$ e a possibilidade de solução será verificada. Em caso negativo será inserido um novo instante de tempo e o sistema testado novamente e assim sucessivamente até que o sistema seja solúvel.

5.2.1. Resolução da PL para o modelo completo

A otimização do modelo completo com a programação linear mostrou-se insolúvel. Investigando a causa, foi encontrada uma justificativa: na definição da PL o estado final é pré-determinado, porém como a equação que define a dinâmica da deformação do cabo de aço é independente de x , e como não há entrada de controle em l , não é possível controlar a deformação ao longo do histórico de controle.

Desta forma, torna-se impossível resolver o problema de controle ótimo para o modelo completo usando programação linear. A solução será encontrada para o modelo simplificado e o histórico de controle definido será aplicado no modelo completo. Como será visto, o resultado não será satisfatório e outra abordagem será adotada.

5.2.2. Resolução da PL para o modelo simplificado

Para o modelo simplificado, o número mínimo de intervalos necessários para garantir a convergência da solução de PL é de $N = 213$, que resulta num tempo total de movimentação de 3,2 segundos. Os resultados para a história de controle e para os estados são mostrados a seguir:

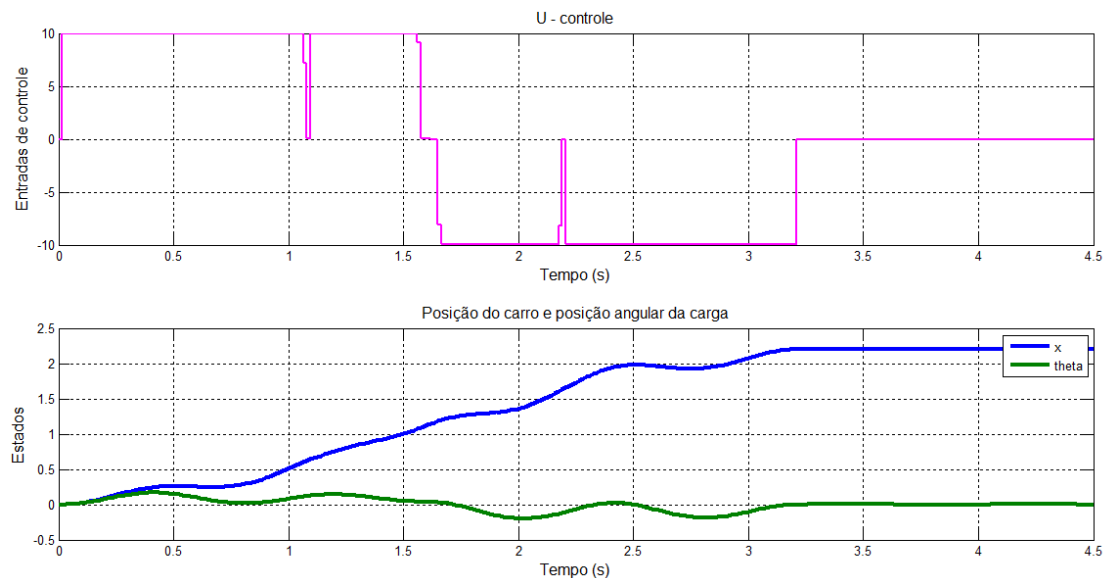


Figura 31 – Controle, Posição do carro e posição angular – Modelo simplificado

A simulação foi estendida até 300 instantes de tempo, com entradas de controle nulas para instantes a partir do 214 para que fosse possível observar o comportamento da carga ao final do movimento.

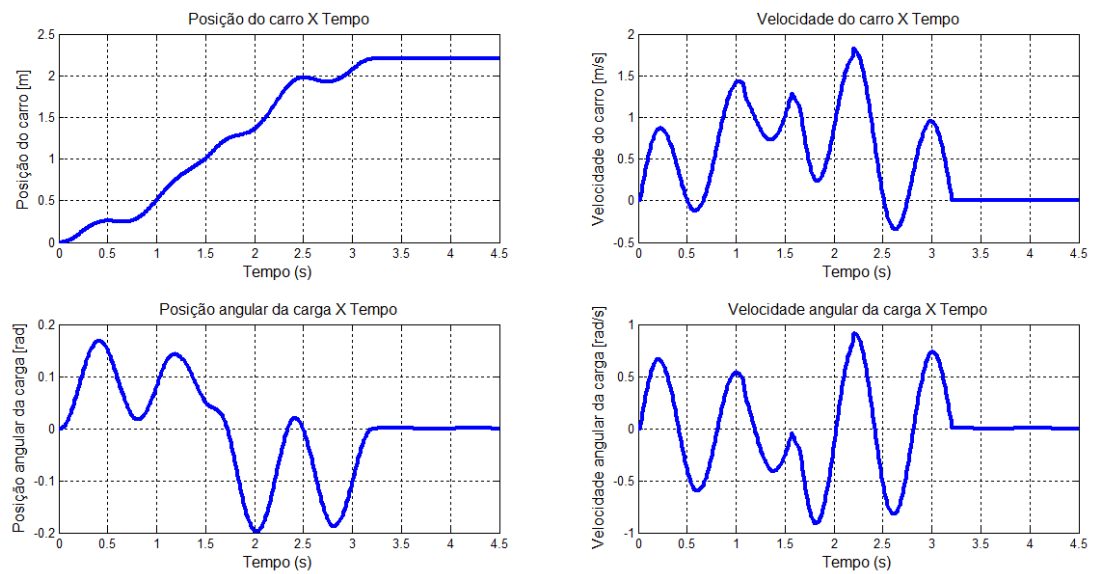


Figura 32 – Variáveis de estado – Modelo simplificado

5.2.2.1. Aplicação da história de controle para o modelo completo

Aplicando a história de controle obtida para o modelo simplificado agora no modelo completo, foram obtidos os resultados a seguir:

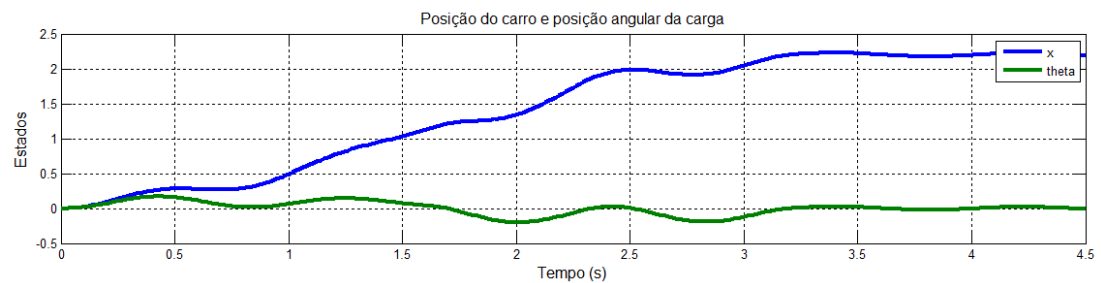


Figura 33 – Posição do carro e posição angular – Modelo completo

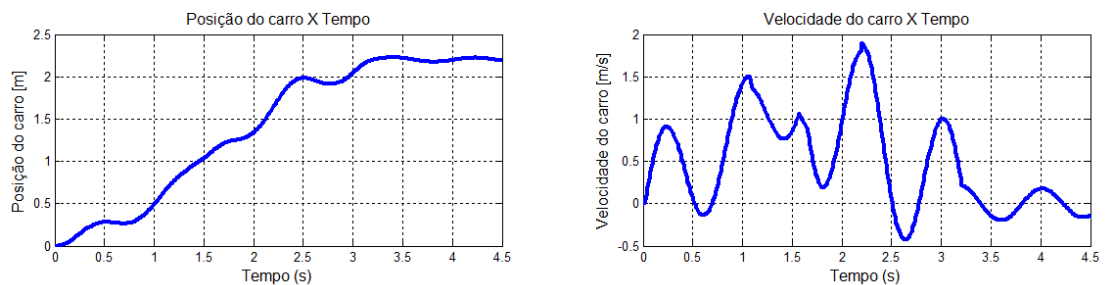


Figura 34 – Posição e velocidade do carro, para modelo completo com controle

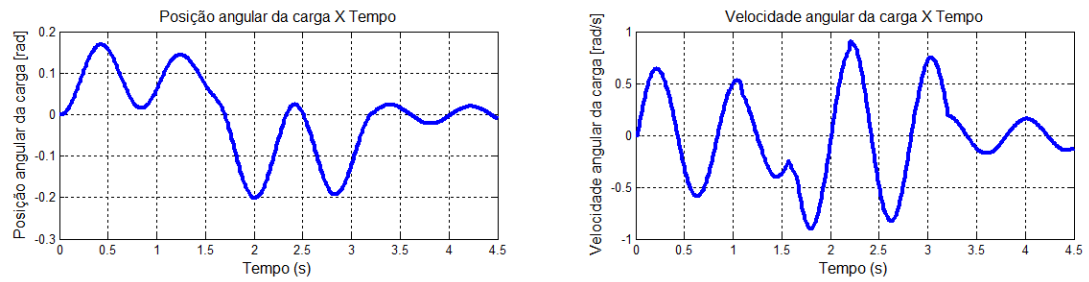


Figura 35 – Posição e velocidade angulares, para modelo completo com controle

A conclusão a que se chega é que o modelo simplificado pode não trazer bons resultados para o posicionamento da carga no caso de o cabo ter alguma deformação (neste caso o cabo em equilíbrio tem uma distensão de 8% em relação ao comprimento original). Isto ocorre pois ao alterar o comprimento do cabo muda-se o período de oscilação da carga.

A seguir está demonstrada uma tentativa de controle do modelo completo, porém sem considerar a equação que relaciona a dinâmica ao longo do comprimento do cabo (que é independente), ou seja, serão utilizadas apenas duas das equações de movimento, que relacionam a posição do carro e ângulo com o comprimento de equilíbrio do cabo (lembrando que o problema usando as três equações é insolúvel).

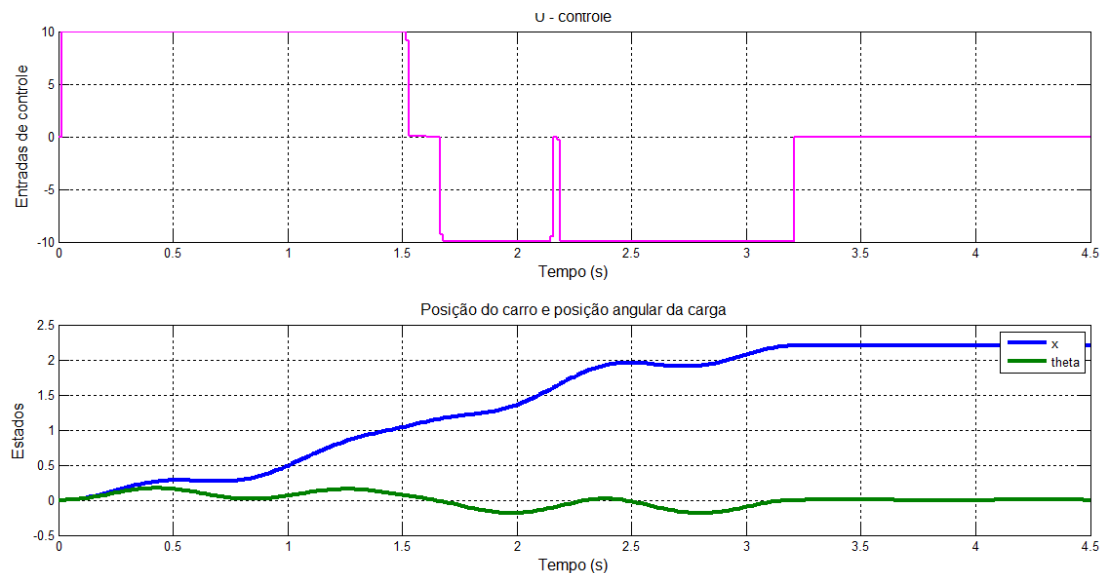


Figura 36 – Controle, posição do carro e posição angular – Modelo completo

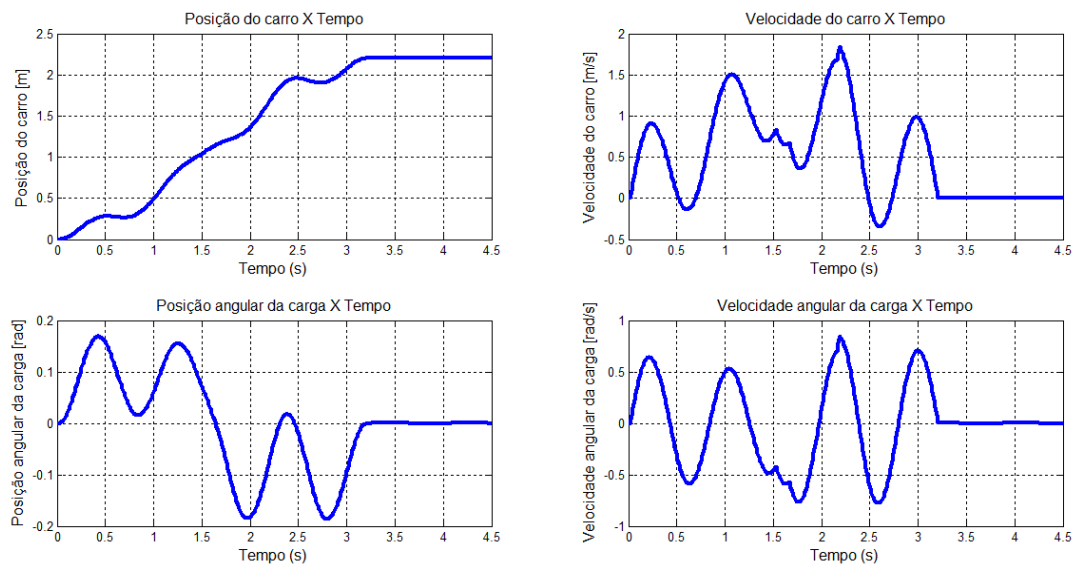


Figura 37 – Variáveis de estado para modelo completo

Neste caso $N = 213$ e o tempo total de movimentação foi de $T = 3,2$ segundos. Após este período a carga se estabiliza na posição final e permanece sem oscilação angular como é desejado.

5.2.2.2. Aplicação da história de controle para o modelo completo – Pequena deformação

Para verificar o impacto da deformação do cabo, o histórico de controle do modelo simples será aplicado ao modelo completo, porém neste caso a constante de elasticidade do cabo será aumentada de forma a reduzir a extensão do cabo a 2% do original. Os resultados são mostrados a seguir.

Nota-se que a estabilidade ao fim do percurso ainda não foi garantida, porém é evidente a melhora na oscilação da carga com o fim da entrada de controle. De qualquer forma, com a deformação do cabo de aço, o controle usando um modelo matemático que não considera este aspecto do modelo físico não garantirá o melhor resultado.

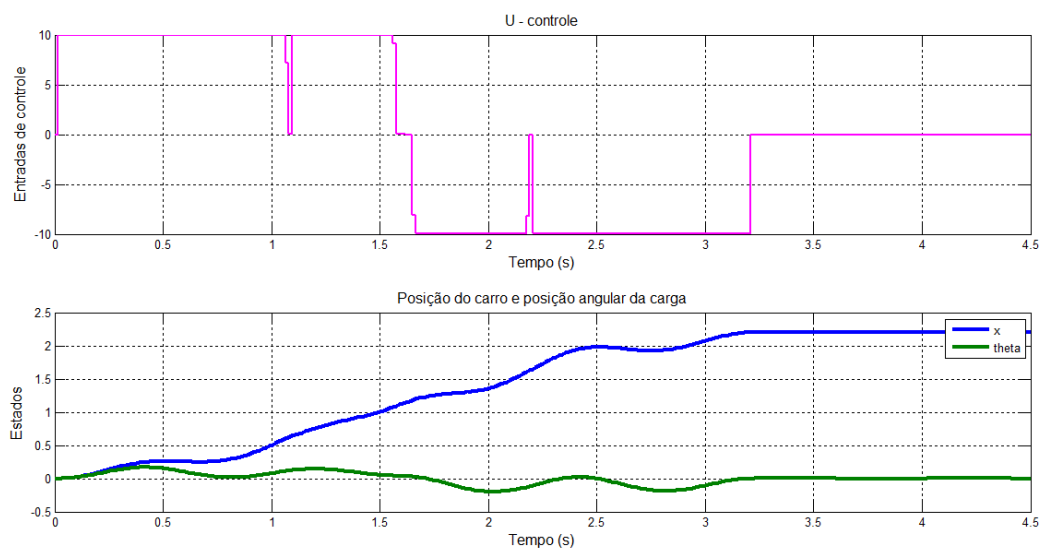


Figura 38 – Controle, posição do carro e posição angular – Modelo completo

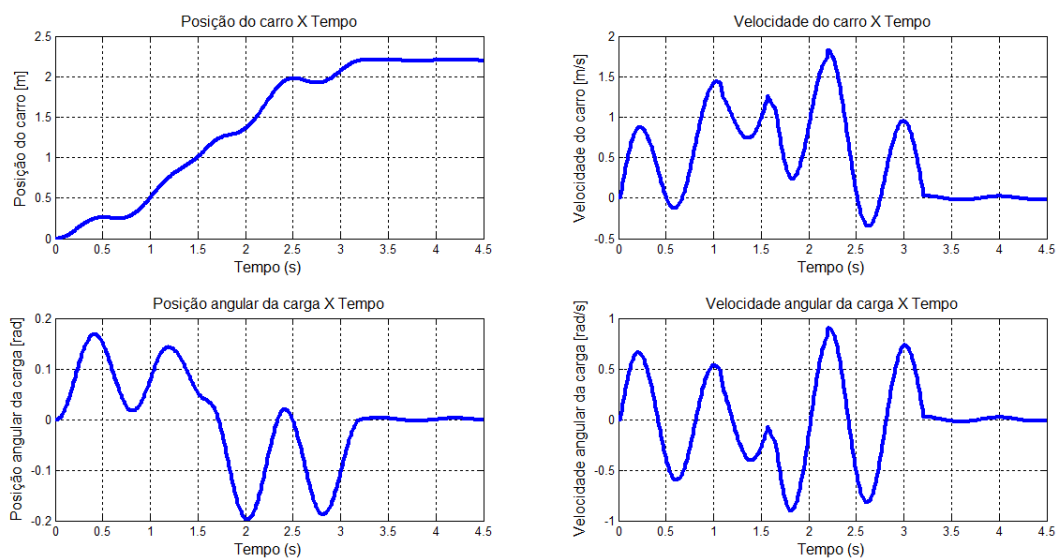


Figura 39 – Variáveis de estado para modelo completo

6. RESULTADOS

6.1. Modelos matemáticos obtidos

Partindo da dedução geral do modelo físico foram deduzidos sistemas de equações matemáticas que representassem tal modelo. Sem aplicar nenhuma simplificação foi deduzido o modelo não-linear. A partir dele foram inseridas hipóteses simplificadoras para a obtenção dos outros modelos.

6.1.1. Modelo não-linear

O modelo matemático inicialmente obtido, que é não linear, é:

$$\begin{cases} (M + M_c) \ddot{x} + M_c(-l\ddot{\theta} \cos\theta + l\dot{\theta}^2 \sin\theta - \ddot{l} \sin\theta - \dot{l}\dot{\theta} \cos\theta) = F_t \\ M_c(\ddot{l} - \ddot{x} \sin\theta - l\dot{\theta}^2 + g \cos\theta) + k(l - l_0) + B_1 \dot{l} = 0 \\ M_c(2l\dot{l}\dot{\theta} + l^2\ddot{\theta} - l\ddot{x} \cos\theta - gl \sin\theta) + B_2 \dot{\theta} = 0 \end{cases} \quad (6.1)$$

6.1.2. Modelo linear completo

Aplicando simplificações para pequenos ângulos, desprezando termos quadráticos e usando a metodologia de pequenos distúrbios para as variáveis nas quais isso faz sentido, o modelo linear obtido é:

$$\begin{cases} (M + M_c)\ddot{x} - M_c \cdot l_{eq} \cdot \delta\ddot{\theta} = F_T \\ M_c(l_{eq}^2 \cdot \delta\ddot{\theta} + \ddot{x} \cdot l_{eq} + g \cdot l_{eq} \cdot \delta\theta) + B_2 \delta\dot{\theta} = 0 \\ M_c(\delta\ddot{l} + g) + k(l_{eq} + \delta l - l_0) + B_1 \delta\dot{l} = 0 \end{cases} \quad (6.2)$$

6.1.3. Modelo linear simplificado

Para o mesmo modelo não-linear, aplicando simplificações para pequenos ângulos, desprezando termos quadráticos e considerando as derivadas em relação à variável l nulas (cabo inextensível), o modelo resultante fica:

$$\begin{cases} (M + M_c)\ddot{x} - M_c \cdot l_0 \cdot \ddot{\theta} = F_T \\ M_c(l_0^2 \cdot \ddot{\theta} + \dot{x} \cdot l_0 + g \cdot l_0 \cdot \theta) + B_2 \dot{\theta} = 0 \end{cases} \quad (6.3)$$

6.2. História de controle obtida

Para a movimentação com as condições definidas no problema e usando o modelo matemático simplificado a história de controle obtida foi:

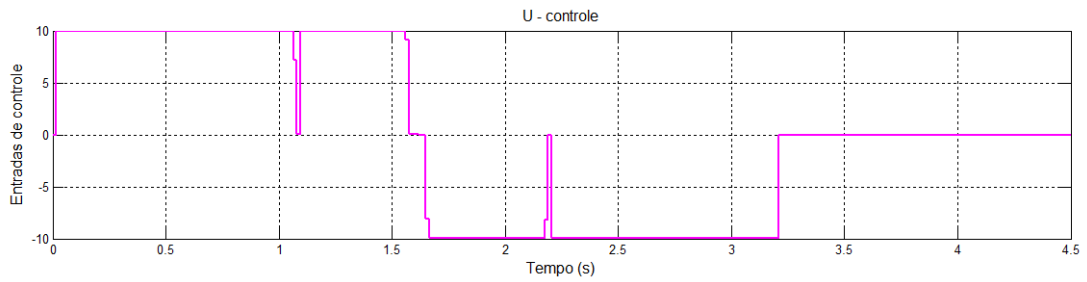


Figura 40 – História de controle para modelo simplificado

No caso do modelo matemático completo a história de controle obtida foi levemente diferente:

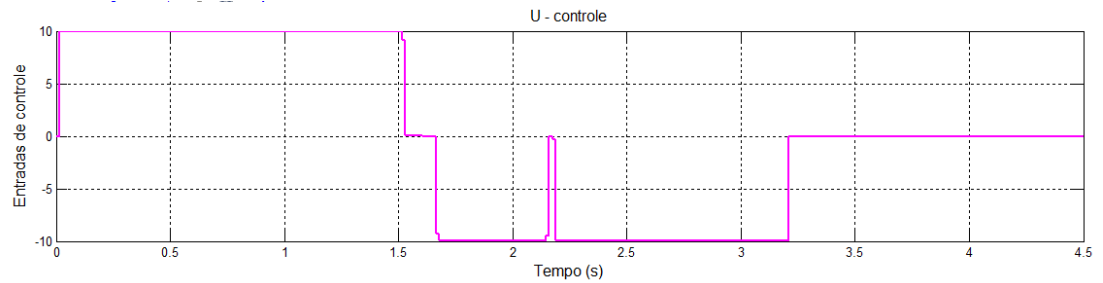


Figura 41 – História de controle para modelo completo

6.3. História de controle aplicada aos modelos matemáticos

6.3.1. Modelo linear completo

6.3.1.1. História de controle para o modelo simplificado

História de controle, obtida na resolução da PL do modelo simplificado, aplicada ao modelo completo.

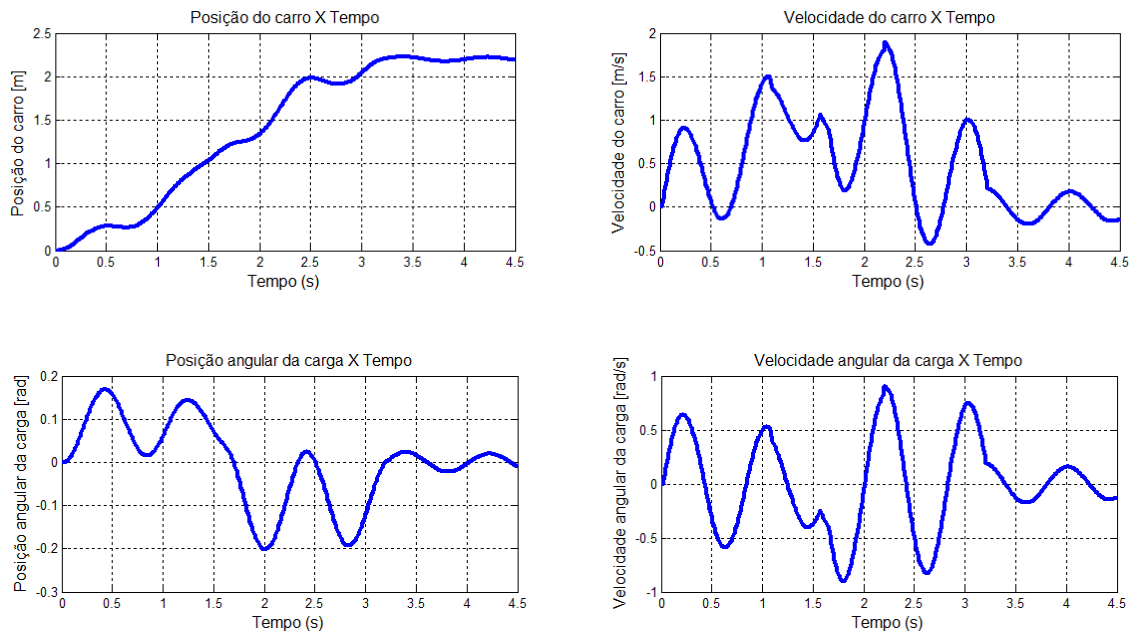


Figura 42 –Variáveis de estado do modelo completo – Controle para modelo simplificado

6.3.1.2. História de controle para o modelo completo

História de controle, obtida na resolução da PL do modelo completo, aplicada ao modelo completo.

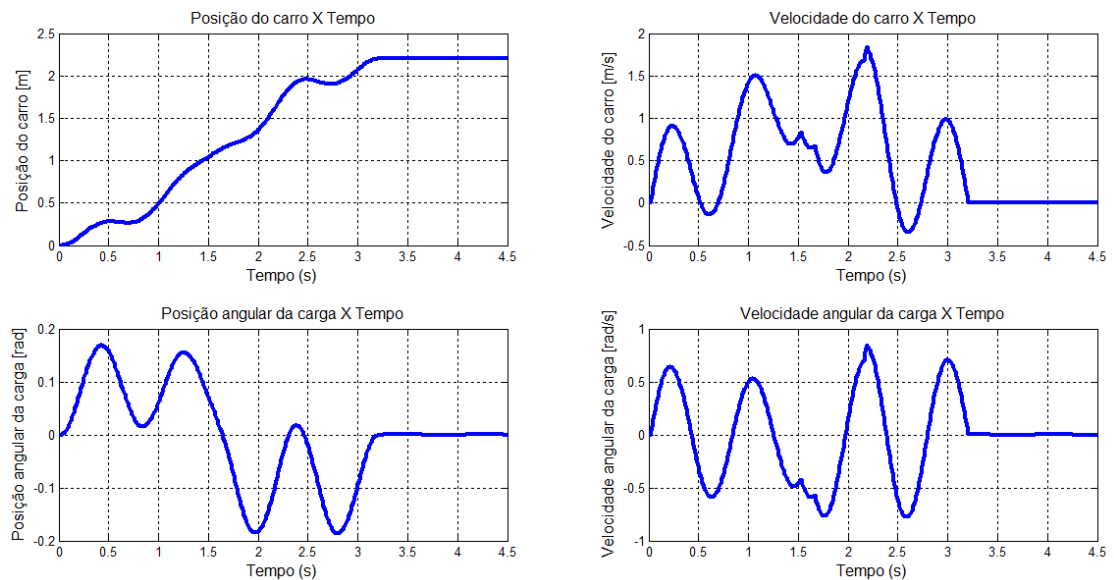


Figura 43 –Variáveis de estado do modelo completo – Controle para modelo completo

6.3.2. Modelo linear simplificado

História de controle, obtida na resolução da PL do modelo simplificado, aplicada ao modelo simplificado.

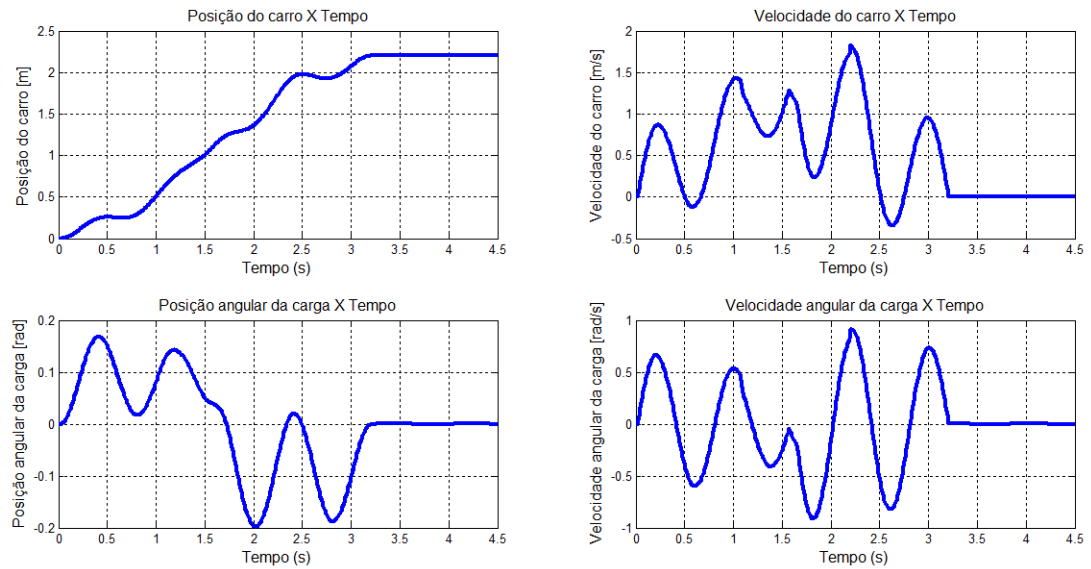


Figura 44 –Variáveis de estado do modelo simplificado – Controle para modelo simplificado

7. CONCLUSÕES

Após todas as dificuldades enfrentadas ao longo da elaboração do estudo e da análise de todos os resultados, algumas conclusões podem ser feitas:

- O modelo é não-linear: ficou claro que a tentativa de linearização do modelo faz com que as variáveis fiquem desacopladas, o que não é verdadeiro para o modelo físico. As simplificações fizeram com que a equação que exhibe a dinâmica de distensão do cabo de aço se tornasse independente das demais e portanto a interferência que isso possa ter no movimento angular da carga não foi capturado.
- Ao linearizar o modelo são necessárias apenas duas equações: como mencionado anteriormente, a terceira equação de movimento nada diz a respeito da posição do carro e da posição angular da carga, deste modo, se o estudo for a respeito da oscilação angular e do posicionamento, somente duas equações são relevantes.
- Os modelos matemáticos do sistema simplificado e completo são semelhantes: ao eliminar a terceira equação os dois sistemas ficam muito similares, a única diferença entre eles é o comprimento do cabo utilizado.
- Contemplar ou não a distensão do cabo faz diferença: os testes de controle mostram que existem diferenças nos resultados ao se utilizar o comprimento original ou o comprimento de equilíbrio do cabo suportando a carga.
- A deformação é o que interessa: conforme se reduz a deformação percentual do comprimento de equilíbrio em relação ao comprimento original, mais próximos ficam os modelos, o que é esperado.
- O modelo simplificado foi testado por [5] num modelo físico e obteve resultados excelentes. Porém o protótipo utilizava uma pequena barra de aço como cabo, além de uma carga de massa extremamente pequena, portanto as hipóteses adotadas por ele são muito aderentes ao protótipo físico.

- Dado que não há custo adicional em relação ao controlador, é interessante sempre utilizar o modelo matemático considerando-se o comprimento do cabo já deformado, de forma a garantir uma movimentação mais estável e um resultado mais próximo do real.

8. SUGESTÕES DE CONTINUIDADE

A seguir são listadas algumas sugestões de continuidade para o estudo:

- Testar os resultados deste trabalho em um modelo físico ou protótipo para confirmar a veracidade.
- Fazer uma simulação das histórias de controle no modelo não-linear para entender qual a dinâmica que ele adotaria. Adicionalmente pode ser interessante resolver o problema de controle ótimo com técnicas de controle não-linear.
- Estender o estudo para guindastes, de forma a contemplar a elasticidade da viga, que se curva conforme a carga se movimentada para a ponta da lança. O modelo físico e o respectivo modelo matemático são mostrados abaixo (cabo inextensível).

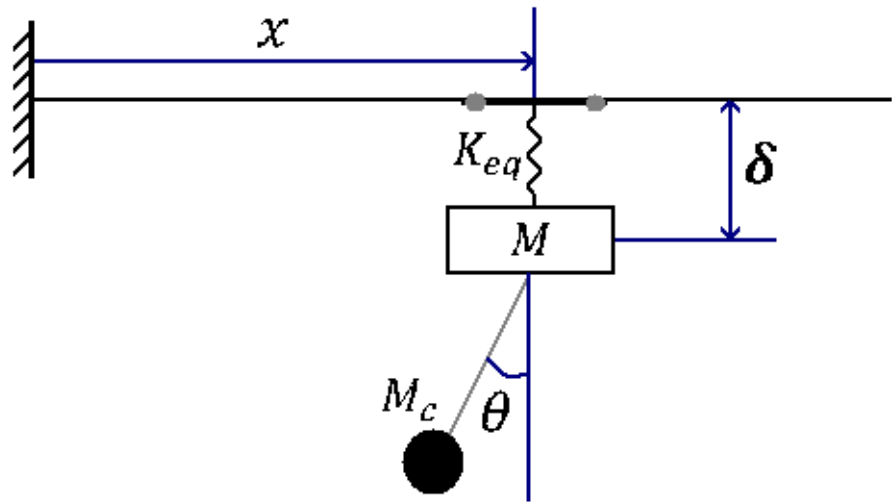


Figura 45 – Modelo de viga de guindaste com elasticidade

$$\begin{cases} (M + M_c) \ddot{x} - M_c l \ddot{\theta} - \frac{(M + M_c)^2 g^2 x^2}{2EI} = 0 \\ (M + M_c) \ddot{\delta} - M_c l \cdot \ddot{\theta} \cdot \theta + (M + M_c)g = 0 \\ l \ddot{\theta} - \ddot{x} - \ddot{\delta} \theta = 0 \end{cases} \quad (7.1)$$

9. REFERÊNCIAS

- [1] AUERNIG, J. W.; **TROGER, H. INTERNATIONAL FEDERATION OF AUTOMATIC CONTROL**: Time Optimal Control of Overhead Crane with Hoisting of the Load, 1987.
- [2] COLIN, E. C. *Pesquisa Operacional*. [S.l.]: LTC, 2007.
- [3] KIRK, D. E. *Optimal Control Theory*. [S.l.]: Prentice-Hall, 1998.
- [4] UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO. **SISTEMA INTEGRADO DE BIBLIOTECAS – SIBI/USP**: Diretrizes para a apresentação de dissertações e teses da USP: documento eletrônico e impresso. São Paulo, 2009.
- [5] PUGLIA, L.V. **CENTRO UNIVERSITÁRIO DA FEI**: Uso da Programação Linear no Controla Ótimo de um Sistema Carro-Pêndulo. São Bernardo do Campo, 2011.
- [6] SOUZA, E.J.C. **UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**: Controle anti-oscilatório de tempo mínimo para guindaste usando a Programação Linear. São Paulo, 2009.
- [7] PESCE, C.P. **DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA - USP**: Dinâmica dos corpos rígidos. 2ª edição. São Paulo, 2009.
- [8] MARTINS, C.A. **DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA - USP**: Introdução à Mecânica Analítica – Notas de Aula. São Paulo, 2006.
- [9] ZAINAL, Z.B. **UNIVERSITI TEKNOLOGI MALAYSIA**: Modeling and Vibration Control of a Gantry Crane. Malaysia, 2005.
- [10] WINSTIN W. L., Introduction to mathematical programming: Applications and algorithms, DUXBURY PRESS, 1995
- [11] JAMES K. S., Linear Programming and Applications, Springer-Verlag, 1989.
- [12] G. B. DANTZIG, Linear Programming and Extensions, Princeton University Press, 1963
- [13] FERGUSON S. T., **UNIVERSITY OF CALIFORNIA, LOS ANGELES (UCLA)**, Linear Programming: A concise introduction.
- [14] FLEURY A. T., **UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**, Notas de aula – Controle.
- [15] Catálogo, **CIMAF**. Disponível em:
http://www.cabofercabosdeaco.com.br/pdf/Manual_Tecnico_CIMAF.pdf, Acesso em Agosto de 2014.

10. APÊNDICE A – PROGRAMAS

```
// ----- Rubens Meneghini Terra -----//  
//  
// Projeto de Conclusao de curso //  
// Simulação Linear das equações de movimento //  
// SISTEMA SIMPLIFICADO SEM ATUACAO E CONTROLE //  
// ENTRADA IMPULSO //  
// -----//
```

```
//LIMPA
```

```
clear
```

```
//----- CONSTANTES DE PROJETO -----
```

```
g=9.8;
```

```
pi=3.1415;
```

```
M= 150;
```

```
Mc= 1000;
```

```
k = 1e5;
```

```
B1 = 300;
```

```
B2 = 100;
```

```
li = 0.7;
```

```
leq = li + Mc*g/k;
```

```
Ft = 100;
```

```
// ----- CONSTANTES PARA ESPAÇO DE ESTADOS -----
```

```
c1 = (M+Mc)/Mc;
```

```
c2 = -li;
```

```
c3 = -li;
```

```
c4 = li*li;
```

```
c5 = -g*li;
```

```
c6 = -B2/Mc;
```

```
c7 = Ft/Mc;
```

```
// ----- MATRIZES PARA O SISTEMA LINEAR -----
```

```
J= [1 0 0 0;  
    0 c1 0 c2;  
    0 0 1 0;  
    0 c3 0 c4];
```

```
K = [0 1 0 0;  
     0 0 0 0;  
     0 0 0 1;  
     0 0 c5 c6];
```

```
L = [0;c7;0;0];
```

```
M = inv(J);
```

```
A = M*K;
```

```
B=M*L;
```

```
C=[1 0 0 0];
```

```
D=0;
```

```
// ----- DEFINICAO DO SISTEMA -----
```

```
funcCrane=syslin('c',A,B,C,D);
```

```
x0=0;
```

```
t=0:0.01:10;
```

```
// Simulando o sistema usando o comando csim
```

```
[x]=csim('impuls',t,funcCrane);
```

```
xset('window',1)
```

```
xset('thickness',3)
```

```
xset('font size',3)
```

```
plot(t,x,2);
```

```
xtitle("Resposta a impulso - Deslocamento","Tempo (t) [s]","Deslocamento (x) [m]");
```

```
// ----- VELOCIDADE -----
```

```
C=[0 1 0 0];
```

```
//Definição do sistema
```

```
funcCrane=syslin('c',A,B,C,D);
```

```
x0=0;
```

```
t=0:0.01:10;
```

```
// Simulando o sistema usando o comando csim
```

```
[x]=csim('impuls',t,funcCrane);
```

```
xset('window',2)
```

```
xset('thickness',3)
```

```
xset('font size',3)
```

```
plot(t,x,1);
```

```
xtitle("Resposta a impulso - Velocidade","Tempo (t) [s]","Velocidade (x') [m/s]");
```

```
// ----- ANGULO -----
```

```
C=[0 0 1 0];
```

```
//Definição do sistema
```

```
funcCrane=syslin('c',A,B,C,D);
```

```
x0=0;
```

```
t=0:0.01:10;
```

```
// Simulando o sistema usando o comando csim
```

```
[x]=csim('impuls',t,funcCrane);
```

```
xset('window',3)
```

```
xset('thickness',3)
```

```
xset('font size',3)
```

```
plot(t,x,1);
```

```

        xtitle("Resposta a impulso - Posição Angular","Tempo (t) [s]","Posição Angular (theta)
[rad]");

// ----- VELOCIDADE ANGULAR -----

C=[0 0 0 1];

//Definição do sistema
funcCrane=syslin('c',A,B,C,D);

x0=0;
t=0:0.01:10;

// Simulando o sistema usando o comando csim
[x]=csim('impuls',t,funcCrane);
xset('window',4)
xset('thickness',3)
xset('font size',3)
plot(t,x,1);
xtitle("Resposta a impulso - Velocidade Angular","Tempo (t) [s]","Velocidade Angular
(theta) [rad/s]");

```

```

// ----- Rubens Meneghini Terra -----//
//
// Projeto de Conclusao de curso
// Simulação Linear das equações de movimento
// SISTEMA COMPLETO SEM ATUACAO E CONTROLE
// ENTRADA IMPULSO
// -----//

//LIMPA
clear

//----- CONSTANTES DE PROJETO -----
g=9.8;
pi=3.1415;

M= 150;
Mc= 1000;

k = 1e5;

B1 = 300;
B2 = 100;

li = 0.7;
leq = li + Mc*g/k;

Ft = 100;

// ----- CONSTANTES PARA ESPAÇO DE ESTADOS -----
c1 = (M+Mc)/Mc;
c2 = -leq;
c3 = -leq;
c4 = leq*leq;
c5 = -g*leq;
c6 = -B2/Mc;
c7 = Ft/Mc;
c8 = 1;
c9= -k/Mc;
c10 = -B1/Mc;
c11= -((k/Mc*(leq-li))+g);
// ----- MATRIZES PARA O SISTEMA LINEAR -----
J= [1 0 0 0 0;
    0 c1 0 c2 0;
    0 0 1 0 0;
    0 c3 0 c4 0;
    0 0 0 1 0;
    0 0 0 0 c8];

K = [0 1 0 0 0;
    0 0 0 0 0;
    0 0 0 1 0;
    0 0 c5 c6 0;
    0 0 0 0 1;
    0 0 0 0 c9 c10];

L = [0;c7;0;0;0;c11];

M = inv(J);

```

```

A = M*K;

B=M*L;

C=[1 0 0 0 0];

D=0;

// ----- DEFINICAO DO SISTEMA -----
funcCrane=syslin('c',A,B,C,D);

x0=0;
t=0:0.001:10;

// Simulando o sistema usando o comando csim
[x]=csim('impuls',t,funcCrane);
xset('window',1)
xset('thickness',3)
xset('font size',3)
plot(t,x,1);
xlabel("Resposta a impulso - Deslocamento","Tempo (t) [s]","Deslocamento (x) [m]");

// ----- VELOCIDADE -----
C=[0 1 0 0 0];

//Definição do sistema
funcCrane=syslin('c',A,B,C,D);

x0=0;
t=0:0.001:10;

// Simulando o sistema usando o comando csim
[x]=csim('impuls',t,funcCrane);
xset('window',2)
xset('thickness',3)
xset('font size',3)
plot(t,x,1);
xlabel("Resposta a impulso - Velocidade","Tempo (t) [s]","Velocidade (x') [m/s]");

// ----- ANGULO -----
C=[0 0 1 0 0];

//Definição do sistema
funcCrane=syslin('c',A,B,C,D);

x0=0;
t=0:0.01:10;

// Simulando o sistema usando o comando csim
[x]=csim('impuls',t,funcCrane);
xset('window',3)
xset('thickness',3)
xset('font size',3)
plot(t,x,1);
xlabel("Resposta a impulso - Posição Angular","Tempo (t) [s]","Posição Angular (theta) [rad]");

// ----- VELOCIDADE ANGULAR -----

```

```
C=[0 0 0 1 0 0];
```

```
//Definição do sistema
```

```
funcCrane=syslin('c',A,B,C,D);
```

```
x0=0;
```

```
t=0:0.001:10;
```

```
// Simulando o sistema usando o comando csim
```

```
[x]=csim('impuls',t,funcCrane);
```

```
xset('window',4)
```

```
xset('thickness',3)
```

```
xset('font size',3)
```

```
plot(t,x,1);
```

```
xtitle("Resposta a impulso - Velocidade Angular","Tempo (t) [s]","Velocidade Angular (theta')  
[rad/s]");
```

```
// ----- DISTENÇÃO DO CABO DE AÇO -----
```

```
C=[0 0 0 0 1 0];
```

```
//Definição do sistema
```

```
funcCrane=syslin('c',A,B,C,D);
```

```
x0=0;
```

```
t=0:0.001:10;
```

```
// Simulando o sistema usando o comando csim
```

```
[x]=csim('impuls',t,funcCrane);
```

```
xset('window',5)
```

```
xset('thickness',3)
```

```
xset('font size',3)
```

```
plot(t,x,1);
```

```
xtitle("Resposta a impulso - Distensão do cabo","Tempo (t) [s]","Distensão do cabo (l) [m]");
```



```

% -----
%- Rubens Meneghini Terra
%-
%- Projeto de Conclusao de curso
%- Simulação Linear das equações de movimento
%- SISTEMA SIMPLES COM ATUACAO E COM CONTROLE
%- CONTROLE OTIMO
% -----

%LIMPA
clear, clc, clf, format short e

%----- CONSTANTES DE PROJETO -----
pi=3.1415;
g=9.8

M= 150;
Mc= 1000;

k = 1e5;

B1 = 300;
B2 = 100;

li = 1.2;
leq = li + Mc*g/k;

Ft = 100;
%----- RESTRICOES FISICAS DO MODELO -----
xi = [0 0 0 0]'; %estado inicial
xf = [2.2 0 0 0]'; %estado final
xM = [2.6 2 10*pi/180 10]'; %max valores do estado em modulo
uM = [10]; %max valor do controle em modulo
T = 1.5/100; %constante de tempo de amostragem
%-----

% ----- CONSTANTES PARA ESPAÇO DE ESTADOS -----
c1 = (M+Mc)/Mc;
c2 = -li;
c3 = -li;
c4 = li*li;
c5 = -g*li;
c6 = -B2/Mc;
c7 = Ft/Mc;
% ----- MATRIZES PARA O SISTEMA LINEAR -----
W= [1 0 0 0;
    0 c1 0 c2;
    0 0 1 0;
    0 c3 0 c4];

K = [0 1 0 0;
     0 0 0 0;
     0 0 0 1;
     0 0 c5 c6];

L = [0;c7;0;0];

```

```

M = inv(W);

G = M*K;
H=M*L;
I=[1 0 0 0];
J=0;

[A, B, C, D] = c2dm(G,H,I,J,T,'zoh'); %converte para o tempo
discreto
n = length(A);

N = 1;      %define a quant. de intervalos (será iterado)
flag = 0;   %indica que nao atingiu a condicao de tempo minimo
while flag == 0

    t_total = 300*T;
    % Funcao Objetivo J
    % Criando N variaveis 'u' ficticias, mas do vetor 'u' so usamos
as N
    % primeiras na simulacao e as N ultimas na minimizacao do
controle
    % Fazendo J = u(N+1) + u(N+2) +...+ u(2N)
    f = [zeros(N,1);ones(N,1)]; %Define a funcao objetivo
    % Incluindo as restricoes:
    % u(1) <= u(N +1); ?u(1) <= u(N +1)
    % u(2) <= u(N +2); ?u(2) <= u(N +2)
    % : : : :
    % u(N) <= u(N +N);?u(N) <= u(N +N)

    for i = 1 : N
        a1(i, i) = 1;
        a1(i, i+N) = -1;
        a2(i, i) = -1;
        a2(i, i+N) = -1;
    end

    a = [a1
          a2];
    b = [zeros(N,1)
          zeros(N,1)];

    % Condições de igualdade da PL (Funcoes G e F)
    Aeq = [];
    for i = (N-1) : -1 : 0
        Aeq = [Aeq A^i*B];
    end
    Aeq = [Aeq zeros(n,N)]; %Matriz do lado esquerdo da igualdade
    beq = xf -(A^N) * xi;   %Vetor do lado direito da igualdade

    % Restricoes de maximo no vetor de controle (incognitas)
    % |u| <= uM
    LB = -uM*ones(2*N,1);
    UB = +uM*ones(2*N,1);

    %----- Resolucao do sistema linear
    [u, fval,exitflag,output] = linprog(f,a,b,Aeq,beq,LB,UB);
    %-----

```

```

        if exitflag ==1 || N >= t_total/T
            flag = 1;
        else
            N=N+1;
        end
    end

% ----- Simulacao do sistema resultante -----
t_RP = 0 : t_total/T;
t_RP = t_RP';

% Do vetor de controle usamos apenas os N primeiros valores
u_RP = [0];
for i=1 : +1 : N
    u_RP = [u_RP u(i)];
end
%Ate o fim do tempo total de simulacao, a entrada de controle é nula
u_RP = [u_RP zeros(1 , t_total/T-N)];
u_RP = u_RP';

%Define o sistema em tempo discreto
sys= ss(A, B, C, D, []);
%Simula o sistema linear
[x,t,y]=lsim(sys,u_RP,t_RP,xi,'zoh');

%Plota o resultado da PL
if exitflag > 0
    texto = 'O.K.CONVERGIU!!!!';
elseif exitflag == 0
    texto = 'NAO CONVERGIU';
else
    texto = ' <<< INSOLUVEL >>>';
end
disp(texto)
disp('|u1|+|u2|+...+|uN| =')
disp(norm(u(1 : N),1))
figure('Color',[1 1 1]);

posicao= y(1:t_total/T+1,1);
velocidade= y(1:t_total/T+1,2);
theta= y(1:t_total/T+1,3);
thetaponto= y(1:t_total/T+1,4);
grafico = [posicao,theta];

subplot(2,1,2)
plot(t,grafico,'-','LineWidth',3), grid, hold on;
title('Posição do carro e posição angular da carga')
xlabel(texto)
legend('x', 'theta')
xlabel('Instantes de tempo');
ylabel('Estados');
subplot(2,1,1)
stairs(t, u_RP,'- m','LineWidth',2), grid, hold on;
title('U - controle')
xlabel(texto)
xlabel('Instantes de tempo');

```

```

        ylabel('Entradas de controle');

figure('Color',[1 1 1]);
subplot(2,2,1)
    plot(t,posicao,'-','LineWidth',3), grid, hold on;
    title('Posição do carro X Tempo')
    xlabel('Instantes de tempo');
    ylabel('Posição do carro [m]');
subplot(2,2,2)
    plot(t, velocidade,'-','LineWidth',3), grid, hold on;
    title('Velocidade do carro X Tempo')
    xlabel('Instantes de tempo');
    ylabel('Velocidade do carro [m/s]');
subplot(2,2,3)
    plot(t, theta,'-','LineWidth',3), grid, hold on;
    title('Posição angular da carga X Tempo')
    xlabel('Instantes de tempo');
    ylabel('Posição angular da carga [rad]');
subplot(2,2,4)
    plot(t, thetaponto,'-','LineWidth',3), grid, hold on;
    title('Velocidade angular da carga X Tempo')
    xlabel('Instantes de tempo');
    ylabel('Velocidade angular da carga [rad/s]');

```